
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



VARIABLE COMPLEJA

APUNTES DE CÁTEDRA
JULIO DE 2016

JORGE YAZLLE

PREFACIO

El presente es el resultado de compilar notas teóricas elaboradas para el dictado de la asignatura **Variable Compleja**, de la carrera Licenciatura en Matemática (plan de estudios 2000) que se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta. No es, ni pretende ser, más que una herramienta de ayuda para los estudiantes, quienes de ninguna manera deben dejar de consultar los valiosos libros de reconocido prestigio en el área, algunos de los cuales figuran en la bibliografía que se incluye al final.

Estos apuntes están estructurados de modo que se pueda aprovechar el saber previo del alumno, recibido en sus cursos anteriores. Así, por ejemplo, se emplean, sin mayores justificaciones, resultados del Cálculo Diferencial e Integral en una y varias variables, que el estudiante de la carrera ha recibido en Análisis Matemático I y II. En un intento por dar mayor formalidad, se incluye bastante desarrollo de la topología de los complejos con la métrica euclídea, por dos razones: la primera, poder calar más hondo en el enunciado y la demostración de diversas propiedades de la teoría general de funciones de variable compleja; la segunda, servir como fuerte motivación para el aprendizaje de Topología General que el estudiante verá en el siguiente semestre. La experiencia ha demostrado que ninguna de esas razones es tan descabellada.

Dado que el curso tiene una duración de 15 semanas, en esta nueva recopilación se ha preferido priorizar la presentación de los resultados más destacados del área en lo referente a integración y desarrollos en series, con la intención de cubrir lo más detalladamente posible esos importantes contenidos dentro del cursado regular. También a causa de la limitación de tiempo, muchos resultados clásicos del campo de los complejos se incluyen como ejercicios, con suficientes sugerencias (en muchos casos, encadenadas) como para que el alumno pueda demostrarlos por sí mismo. Además del resultado en sí, considero que ésto induce en el estudiante una metodología de investigación que le ayudará posteriormente en su carrera y en su desempeño profesional.

Agradezco en especial a Cristina Preti, con quien tuve la suerte de aprender Análisis Complejo cuando fue mi profesora y cuando me aceptó como miembro de sus cátedras, y a Cristina Egüez, quien no sólo ha leído gran parte de estos apuntes, sino que es ideóloga de varios hechos que aquí figuran, y que me he permitido tomar de nuestro previo trabajo conjunto en otras asignaturas. También reconozco la colaboración del Lic. José Esteban Rojas durante su período de adscripción a la cátedra, a través de sugerencias para la presentación de los ejercicios y en su detallada revisión de versiones preliminares de estos apuntes.

Jorge F. Yazlle
Julio de 2016

Índice general

Capítulo 1. NÚMEROS COMPLEJOS	3
1. El sistema de los números complejos	3
2. Forma exponencial de los números complejos	8
3. Radicación	11
4. La expresión exponencial e^z . Logaritmos en \mathbb{C}	13
5. Expresiones trigonométricas y sus inversas	14
6. Expresiones hiperbólicas y sus inversas	15
7. Potenciación en general	15
EJERCICIOS	16
Capítulo 2. LA TOPOLOGÍA USUAL DE LOS COMPLEJOS	18
1. La distancia euclídea en el plano complejo. Conjuntos abiertos y cerrados	18
2. Conjuntos compactos	22
3. Conjuntos conexos. Dominios y regiones en \mathbb{C} .	26
4. El plano extendido y la esfera de Riemann	28
EJERCICIOS	30
Capítulo 3. FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA	32
1. Preliminares	32
2. Función compleja de variable compleja	32
3. Límites	35
4. Continuidad	40
5. Derivabilidad	45
6. Analiticidad	51
7. Funciones Armónicas	53
EJERCICIOS	57
Capítulo 4. INTEGRACIÓN	59
1. Curvas y contornos en el plano complejo	59
2. Integral de funciones complejas de variable real	61
3. Integral de funciones de variable compleja sobre contornos	62
4. Integración sobre contornos cerrados	67
5. Las fórmulas integrales de Cauchy. Consecuencias	74
APÉNDICE: DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA GENERALIZADA DE CAUCHY	80
EJERCICIOS	83
Capítulo 5. SUCESIONES Y SERIES. SERIES DE TAYLOR	86
1. Sucesiones complejas	86
2. Series de números complejos	90
3. Sucesiones y series funcionales	92
4. Series de potencias. Series de Taylor	97
EJERCICIOS	102
Capítulo 6. SERIES DE LAURENT. TEOREMA DE LOS RESIDUOS	104
1. Desarrollos en series de Laurent	104
2. Clasificación de singularidades aisladas	112

3. Residuos. El Teorema de los Residuos	117
4. Aplicaciones del Teorema de los Residuos al cálculo de integrales reales	122
EJERCICIOS	127
Capítulo 7. TRANSFORMACIONES EN EL PLANO COMPLEJO	131
1. Rectas y circunferencias en el plano complejo	131
2. Transformación de curvas y regiones	132
3. Transformaciones conformes	136
4. Transformaciones por funciones elementales	137
EJERCICIOS	142
Capítulo 8. DINÁMICA EN EL PLANO COMPLEJO: FRACTALES	145
1. Conjuntos de Julia	145
2. El conjunto de Mandelbrot	150
3. Sistemas de Funciones Iteradas	151
Bibliografía	159

NÚMEROS COMPLEJOS

Los números reales, a pesar de sus excelentes propiedades, presentan algunas deficiencias, como por ejemplo la inexistencia de soluciones de ecuaciones sencillas tales como $x^2 + 1 = 0$. Los números complejos surgieron como consecuencia de encontrar solución a ecuaciones algebraicas de este tipo, y, a partir de su aparición, fueron objeto de estudio a los fines de extender las nociones del cálculo a un ambiente más general. Es así como se fueron desarrollando los conceptos de funciones de variable compleja, y sus operaciones de límites, derivación e integración. Pronto se advirtió también la sencilla forma en que, mediante simples operaciones algebraicas entre números complejos, podía llevarse a cabo *movimientos del plano* tales como rotaciones, traslaciones, simetrías, etc., dando origen a nuevos campos de estudio y aplicaciones de los números complejos.

En este capítulo estudiaremos la estructura algebraica y geométrica de los números complejos. Veremos distintas formas de representarlos, y extenderemos a este ámbito muchas de las nociones que conocemos para números reales.

1. El sistema de los números complejos

Un **número complejo** es un par ordenado de números reales, y designamos por \mathbb{C} al conjunto de todos los números complejos. Es decir,

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

En otras palabras, si z es un número complejo, debe ser $z = (a, b)$ en donde a y b son ambos números reales; a se denomina la **parte real** de z (denotada mediante $\operatorname{Re} z$), y b se denomina la **parte imaginaria** de z (denotada mediante $\operatorname{Im} z$).

Se dice que dos números complejos son **iguales** si sus respectivas partes reales son iguales y, al mismo tiempo, sus respectivas partes imaginarias son también iguales. Es decir,

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Por supuesto que, así presentado, pareciera ser que \mathbb{C} es simplemente otro nombre para \mathbb{R}^2 . Sin embargo, con las operaciones que definiremos a continuación se genera un sistema con profundas diferencias.

El **sistema de los números complejos** es el conjunto \mathbb{C} de todos los números complejos con las operaciones de **suma** (+) y **producto** (·) definidas de la siguiente manera, para complejos cualesquiera (a_1, b_1) y (a_2, b_2) :

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)\end{aligned}$$

Muchas veces, omitiremos el punto para denotar un producto de números complejos.

Como vemos de la definición, + y · son operaciones binarias (cerradas) en \mathbb{C} . Veremos ahora otras propiedades básicas.

Si (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son dos complejos, gracias a la conmutatividad de la suma de números reales tenemos que

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$$

quedando así establecida la **conmutatividad de la suma** de complejos. De igual manera, por aplicación de propiedades correspondientes para números reales, se deducen la conmutatividad

del producto, la asociatividad de ambas operaciones y la distributividad del producto respecto de la suma.

El complejo $(0, 0)$ es el **elemento neutro de la suma**, y es único. En efecto,

$$(a, b) + (x, y) = (a, b) \iff a + x = a \wedge b + y = b \iff x = 0 \wedge y = 0$$

Similarmente, el complejo $(1, 0)$ es el **elemento neutro del producto**, y también es único, pues

$$(a, b)(x, y) = (a, b) \iff ax - by = a \wedge ay + bx = b,$$

sistema que, resuelto en las incógnitas x e y , arroja, como única solución para cualquier (a, b) , los valores $x = 1, y = 0$.

Dado que

$$(a, b) + (x, y) = (0, 0) \iff a + x = 0 \wedge b + y = 0 \iff x = -a \wedge y = -b,$$

queda claro que cualquier complejo $z = (a, b)$ posee un único **inverso para la suma**, que se llama el **opuesto de z** y se denota por $-z$, siendo $-z = (-a, -b)$.

De la definición de producto, es directo que $(0, 0)(x, y) = (0, 0)$ cualquiera sea $(x, y) \in \mathbb{C}$, y, por lo tanto, $(0, 0)$ no posee inverso para el producto. Sin embargo, cualquier otro complejo posee tal inverso: dado $(a, b) \neq (0, 0)$, tenemos que

$$(a, b)(x, y) = (1, 0) \iff ax - by = 1 \wedge ay + bx = 0$$

Como es $a \neq 0$ o $b \neq 0$, ocurre que $a^2 + b^2 \neq 0$, así que el determinante del sistema es no nulo, y resolviéndolo en las incógnitas x, y , llegamos a que

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad y = -\frac{b}{a^2 + b^2},$$

lo que muestra que cualquier complejo $z = (a, b) \neq (0, 0)$ posee un único **inverso para el producto**, que se denomina el **inverso de z** y se denota por z^{-1} , siendo $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$.

Como vemos, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura de **cuerpo abeliano**. Como en todo cuerpo, ocurre que el producto de dos complejos es igual al neutro de la suma si, y sólo si, al menos uno de los factores es ese neutro (hecho que también puede verificarse haciendo las respectivas cuentas). Una diferencia esencial que presenta en relación con el cuerpo de los números reales consiste en que no introduciremos un orden en \mathbb{C} , por lo que expresiones tales como $z_1 < z_2$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, no tendrán, en general, sentido para nosotros (excepto que z_1 y z_2 estén representando números reales, en el sentido que explicaremos a continuación).

1.1. Los reales como subconjunto de los complejos. A partir de la definición de número complejo, podría inferirse que un número real no pertenece a \mathbb{C} . Sin embargo, veremos cómo un cierto subconjunto de los complejos *se comporta* (en sentido algebraico) igual que los números reales, y eso nos permitirá ver a \mathbb{R} como subconjunto de \mathbb{C} .

Llamaremos complejos reales a los números complejos con parte imaginaria cero. Sea $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ el conjunto de todos estos números, es decir, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \{(a, 0) \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{R}\}$. La función $f : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f((a, 0)) = a$, asigna a cada complejo real su primera componente. Esta aplicación es biyectiva y además un isomorfismo de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ en \mathbb{R} , respecto de la suma y del producto. En efecto, sean $z_1 = (a_1, 0)$ y $z_2 = (a_2, 0)$; entonces,

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= f((a_1, 0) + (a_2, 0)) = f((a_1 + a_2, 0)) = a_1 + a_2 \\ &= f((a_1, 0)) + f((a_2, 0)) = f(z_1) + f(z_2) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} f(z_1 z_2) &= f((a_1, 0)(a_2, 0)) = f((a_1 a_2, 0)) = a_1 a_2 \\ &= f((a_1, 0)) f((a_2, 0)) = f(z_1) f(z_2) \end{aligned}$$

Entonces, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ y \mathbb{R} son conjuntos indistinguibles desde el punto de vista algebraico, y, en este sentido, podemos considerar a los reales como inmersos en el conjunto de los complejos. Este

isomorfismo permite identificar cada complejo real con el real correspondiente a su parte real, siendo conveniente en la práctica escribir al complejo $(a, 0)$ directamente como a ; en particular, $(0, 0) = 0$ y $(1, 0) = 1$. Resulta fácil verificar que para reales a, b, λ cualesquiera, se tiene que $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, y, en particular, $0 \cdot (a, b) = 0$.

1.2. Resta, división y potencia entera en \mathbb{C} . La unicidad de opuestos e inversos en \mathbb{C} permite definir naturalmente las operaciones de resta y cociente en \mathbb{C} .

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, la **diferencia entre z_1 y z_2** , denotada $z_1 - z_2$, es el complejo que resulta de hacer $z_1 + (-z_2)$. Si es $z_2 \neq 0$, el **cociente entre z_1 y z_2** , denotado z_1/z_2 , es el resultado de $z_1 z_2^{-1}$.

Nótese que $z/0$ no está definido, cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$.

Aplicando las fórmulas de inversos y de las correspondientes operaciones, resulta

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) - (a_2, b_2) &= (a_1 - a_2, b_1 - b_2) \\ \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} &= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \end{aligned}$$

En particular, para cualquier $z \neq 0$, resulta $z/z = 1$. Además, se puede verificar directamente que para cualesquiera $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, con $z_2 \neq 0 \neq z_4$,

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_4 + z_2 z_3}{z_2 z_4} \qquad \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$$

(Ambas igualdades se pueden ver fácilmente notando que $(z_2 z_4)^{-1} = z_2^{-1} z_4^{-1}$.)

Ahora veamos la definición de potenciación con exponente entero.

Para $z \in \mathbb{C}$ y n entero positivo, se define la n -ésima potencia de z , denotada z^n , mediante

$$z^n = \begin{cases} z & \text{si } n = 1 \\ z \cdot z^{n-1} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

O sea, z^n es el resultado de $z \cdot z \cdots z$, habiendo n factores z en la expresión.

Por otro lado, para cualquier complejo $z \neq 0$, se define $z^0 = 1$.

Finalmente, para $z \neq 0$ y n entero negativo, se define $z^n = (z^{-1})^{|n|}$, evaluándose esta expresión con la fórmula de potenciación con exponente natural dada más arriba. Nótese que resulta, entonces, $z^n = (z^{-1})^{-n}$.

Obsérvese que 0^n queda indefinido para todo $n \leq 0$.

De la definición, puede verse fácilmente que la potenciación con exponente entero es distributiva respecto del producto y el cociente, y que se cumplen las reglas del producto y cociente de potencias de igual base, y de potencia de potencia.

1.3. Forma binómica de los números complejos. Los números complejos que tienen parte real igual a cero se llaman **números imaginarios puros**. En particular, el número complejo imaginario puro que tiene componente imaginaria igual a 1 se llama **unidad imaginaria**, y se denota mediante i ; es decir, $i = (0, 1)$, que satisface que $i^2 = -1$, como es fácil de verificar.

En virtud del isomorfismo entre los complejos reales y los reales, y de que $i = (0, 1)$, cualquier complejo $z = (a, b)$ puede escribirse como

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

Cuando un complejo (a, b) se expresa en forma de $a + bi$, se dice que está expresado en **forma binómica**. La conveniencia de dicha forma es que facilita los cálculos algebraicos, evitando el uso de pares ordenados, que requieren recordar las fórmulas de adición y producto. Esas operaciones se pueden realizar en forma binómica usando las mismas reglas algebraicas de los números reales (tratando a i como una expresión literal), con la consideración adicional de que,

en el caso de aparecer la expresión i^2 , debe reemplazarse por -1 . Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i \\ (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

La división de complejos también es más fácil en forma binómica:

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

1.4. Potencias de la unidad imaginaria. Las potencias sucesivas de i son:

$$\begin{aligned}i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2i = (-1)i = -i\end{aligned}$$

Análogamente,

$$i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad i^6 = -1 \quad i^7 = -i$$

En general, si el exponente de i es un número natural $p > 3$, al efectuar su división por 4 se tiene que $p = 4q + r$, con $0 \leq r < 4$. En consecuencia

$$i^p = i^{4q+r} = i^{4q}i^r = (i^4)^q i^r = 1i^r = i^r$$

y este cálculo se reduce a uno de los cuatro casos anteriores cuando r es igual a 0, 1, 2 o 3.

EJEMPLO 1.1. $i^{27} + i^{186} = i^3 + i^2 = -1 - i$. □

1.5. Conjugación y módulo de números complejos. El **conjugado** de $z = (a, b) = a + bi$ es el número complejo $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$. El símbolo \bar{z} también se lee “ z conjugado”. Es fácil verificar que la operación de conjugación es *involutiva*: $\bar{\bar{z}} = z$.

El **módulo** de $z = (a, b)$, denotado por $|z|$, es la raíz cuadrada no negativa de la suma de los cuadrados de sus partes real e imaginaria. Vale decir, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Observar que $|z|$ es un número real no negativo.

La conjugación y el módulo satisfacen las siguientes propiedades, para todos $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \\ \text{(b)} & \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w} \\ \text{(c)} & \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \\ \text{(d)} & \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0) \\ \text{(e)} & z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \\ \text{(f)} & z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z \\ \text{(g)} & |z| = 0 \iff z = 0 \\ \text{(h)} & |-z| = |z| \\ \text{(i)} & |\bar{z}| = |z| \\ \text{(j)} & |z|^2 = z\bar{z} \\ \text{(k)} & |\operatorname{Re} z| \leq |z| \\ \text{(l)} & |\operatorname{Im} z| \leq |z| \\ \text{(m)} & |z \cdot w| = |z||w| \\ \text{(n)} & |z^{-1}| = |z|^{-1} \quad (z \neq 0) \\ \text{(o)} & |z + w| \leq |z| + |w| \\ \text{(p)} & |z - w| \geq ||z| - |w||\end{array}$$

Las demostraciones son de rutina y quedan de ejercicio, excepto la correspondiente al inciso (o), conocida como la **propiedad triangular**, por razones que veremos más adelante. Asumiremos todas las anteriores demostradas, por lo que podemos arrancar considerando la expresión para el cuadrado del módulo de la suma (inciso (j)):

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$

y entonces $|z + w| \leq |z| + |w|$.

A través de una sencilla inducción matemática, puede verse que la desigualdad triangular vale para la suma de varios complejos:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

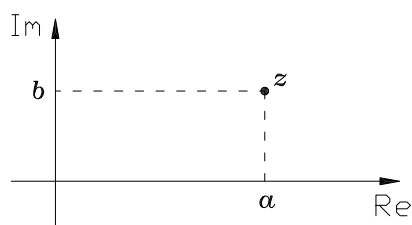
1.6. Los complejos como espacio vectorial. Representación geométrica. El conjunto de los números complejos, con las operaciones de suma de complejos y producto de complejo por un escalar real $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, constituye un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, porque se verifican los axiomas correspondientes, para todos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$:

- | | |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ | 5) $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$ |
| 2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ | 6) $(\lambda + \alpha)z_1 = \lambda z_1 + \alpha z_1$ |
| 3) $0 + z_1 = z_1$ | 7) $\lambda(\alpha z_1) = (\lambda\alpha)z_1$ |
| 4) $z_1 + (-z_1) = 0$ | 8) $1z_1 = z_1$ |

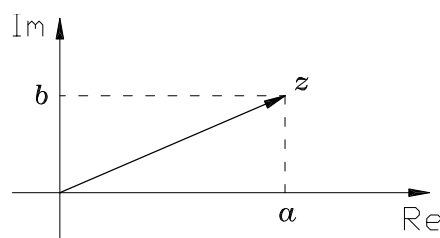
Fácilmente se deduce que \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} , con las operaciones habituales de suma y producto por un escalar, son isomorfos como espacios vectoriales sobre el cuerpo de los reales, y para verlo basta considerar la función “identidad” $f((x, y)) = (x, y)$. Debido a este isomorfismo, un número complejo puede verse como un punto o como un vector en el plano; en este último caso, convendremos que dos vectores con igual longitud, dirección y sentido representan un mismo número complejo, independientemente de su punto de aplicación (o sea, los complejos son *vectores libres*). Por ello, el número complejo $z = (x, y)$ se puede representar mediante cualquier vector cuyos puntos de origen (a_1, b_1) y destino (a_2, b_2) satisfagan $a_2 - a_1 = x$, $b_2 - b_1 = y$.

El módulo de un número complejo es la longitud de cualquiera de los vectores que lo representan, o igualmente la distancia entre el punto que representa al complejo y el origen de coordenadas.

Cuando los números complejos se consideran en correspondencia uno a uno con los puntos del plano cartesiano, al plano se lo denomina **plano complejo** o **plano z** . Los ejes de coordenadas se llaman **eje real** y **eje imaginario** del plano z .

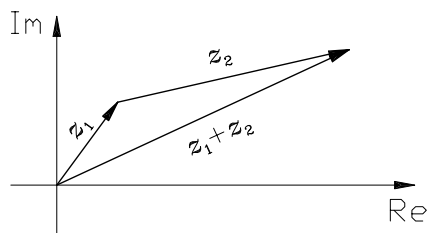
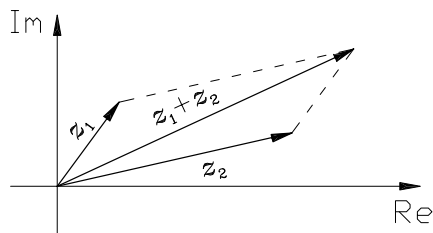


Punto $z = (a, b)$



Vector $z = (a, b)$

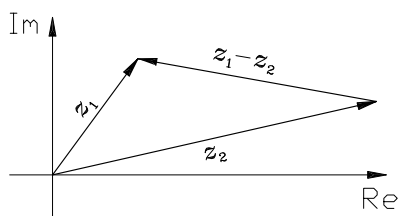
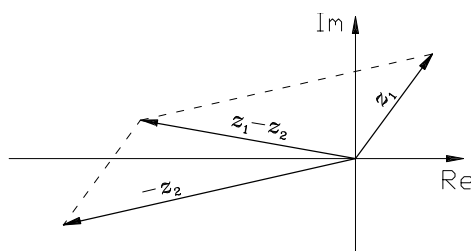
1.7. Interpretación gráfica de la suma y la resta. Puesto que la suma de números complejos se lleva a cabo sumando componente a componente, puede verse que la suma de complejos corresponde a la suma de vectores de acuerdo a la regla del paralelogramo. Entonces, el vector $z_1 + z_2$ es una de las diagonales del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores z_1 y z_2 .

Suma: $z_1 + z_2$ 

Ley del paralelogramo

Ahora podemos entender el porqué del nombre de la propiedad triangular: en cualquier triángulo, la medida de un lado no puede exceder a la suma de las medidas de los otros dos.

El vector $z_1 - z_2$ es la otra diagonal del paralelogramo que tiene como lados adyacentes a los vectores z_1 y z_2 : el vector que va desde z_2 hasta z_1 , como puede verse al construir el paralelogramo correspondiente a la suma de z_1 y $-z_2$.

Resta: $z_1 - z_2$ 

Ley del paralelogramo

Se deduce entonces que la distancia entre z_1 y z_2 es $|z_1 - z_2|$.

Gráficamente, el opuesto de un complejo es su simétrico con respecto al origen, y el conjugado es su simétrico con respecto al eje real.

2. Forma exponencial de los números complejos

Como vimos, podemos considerar a cualquier complejo $z = (x, y)$ como un vector con punto de origen $(0, 0)$ y extremo en el punto (x, y) (el 0 corresponde al vector nulo). Llamemos r a la distancia desde el origen hasta el punto (x, y) y, si $z \neq 0$, θ al ángulo (en radianes) que forma el vector con el semieje real positivo. Es decir, r y θ son las coordenadas polares de z ; r no es otra cosa que $|z|$, el módulo de z , y θ se llama un **argumento** de z , abreviado $\arg z$. Nótese que cualquier múltiplo entero de 2π puede ser añadido a θ sin cambiar z , y, en este sentido, $\arg z$ representa una infinidad de valores, que están englobados en la expresión $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ donde k es cualquier número entero y θ_0 algún valor particular de $\arg z$ en radianes. El **argumento principal** de z , denotado $\text{Arg } z$, es el único argumento de z mayor que $-\pi$ y menor o igual que π . Es decir,

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$$

Así definido, el argumento principal de números complejos que están en el primer y segundo cuadrante toma valores entre 0 y π ; y los números que están en el tercer y cuarto cuadrante, tienen argumento principal entre $-\pi$ y 0. Notamos que:

$$\arg z = \text{Arg } z + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

En particular, destacamos que un punto en el eje real negativo tiene argumento principal π .

La vinculación entre las componentes real e imaginaria de z y sus coordenadas polares viene dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ r = |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} & \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

(para $x = 0$ e $y > 0$, se tiene que $\theta = \pi/2$; para $x = 0$ e $y < 0$, es $\theta = -\pi/2$).

En consecuencia, $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Leonhard Euler, uno de los grandes creadores de notaciones matemáticas modernas, además de diversas constantes, introdujo, en particular, la expresión

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

llamada *Fórmula de Euler*, que define el símbolo $e^{i\theta}$ para cualquier valor real de θ . Con ella, podemos expresar al número complejo $z = x + iy$ en una manera más compacta, llamada **forma exponencial**:

$$z = re^{i\theta}$$

donde r es un número real mayor o igual que cero (el módulo de z) y θ es cualquier argumento de z .¹

Para el punto en el origen, r es igual a cero, y en tal caso θ no está definido, pero por convención establecemos que la forma exponencial para el complejo $(0, 0)$ es 0.

Destacamos que, en particular, la expresión $e^{i\theta}$, o su equivalente $\cos \theta + i \sin \theta$, representa un complejo de módulo unitario y dirección θ .

La ventaja de la notación introducida por Euler es que, al realizar productos, cocientes y potencias enteras de complejos expresados en forma exponencial, se preservan las propiedades conocidas de la exponenciación, (productos y cocientes de potencias de igual base, y potencia de una potencia), según veremos a continuación.

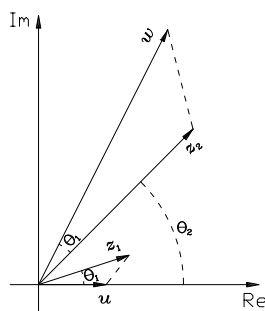
2.1. Producto en forma exponencial. Sean los complejos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = r_1 \cos \theta_1 + ir_1 \sin \theta_1$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = r_2 \cos \theta_2 + ir_2 \sin \theta_2$, con $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Recordando los teoremas trigonométricos de adición, resulta entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

A la luz de este resultado, el producto de dos números complejos es otro complejo que tiene:

- módulo igual al producto de los módulos.
- argumento igual a la suma de los argumentos de los factores (siempre que ninguno de los complejos que se multiplican sea el complejo 0, pues en ese caso el producto es 0 y tiene argumento indeterminado).

2.1.1. Determinación geométrica del producto. Sean los números complejos: $o = (0, 0)$, $u = (1, 0)$, $z_1 \neq 0$ y $z_2 \neq 0$. Considerando a $\overline{oz_2}$ como homólogo a $\overline{oz_2}$, construimos el triángulo $oz_2 w$ semejante al triángulo $ou z_1$, con $\arg w = \arg z_1 + \arg z_2 = \theta_1 + \theta_2$.



¹Otra abreviación que algunos textos emplean para $\cos \theta + i \sin \theta$ es $\text{cis } \theta$. Usando esta expresión, resulta $z = r \text{cis } \theta$, conocida como la **forma polar** de z .

Por propiedad de triángulos semejantes, tenemos que

$$\frac{\overline{ow}}{\overline{oz_1}} = \frac{\overline{oz_2}}{\overline{ou}} \Rightarrow \frac{\overline{ow}}{|z_1|} = \frac{|z_2|}{1} \Rightarrow \overline{ow} = |z_1| |z_2|$$

Luego,

$$|w| = |z_1| |z_2|$$

y, observando que \overline{ow} tiene argumento $\theta_1 + \theta_2$, vemos que el punto w representa al complejo $z_1 z_2$.

2.2. Conjugado en forma exponencial. Si $z = re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$, con $r \geq 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, entonces, por definición de conjugado y por propiedades de seno y coseno de números reales, tenemos que

$$\bar{z} = r \cos \theta - ir \sin \theta = r \cos(-\theta) + ir \sin(-\theta) = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

de donde puede verse que

$$\overline{re^{i\theta}} = re^{i(-\theta)},$$

mostrando así que el módulo del conjugado es igual al módulo del complejo original, y un argumento del conjugado es el opuesto del argumento (propiedades fácilmente visibles en la representación geométrica).

2.3. Inverso multiplicativo en forma exponencial. Sea $z = re^{i\theta} \neq 0$ (es decir, $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$). Por propiedad vista antes, sabemos que $z\bar{z} = |z|^2$. Por lo tanto,

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

De allí que, por la unicidad del inverso multiplicativo,

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

En consecuencia, en la forma exponencial, el inverso de $z = re^{i\theta}$ es

$$z^{-1} = \frac{re^{-i\theta}}{r^2} = r^{-1}e^{-i\theta}$$

Como vemos, el módulo del inverso de z es el inverso del módulo de z (propiedad que ya conocíamos), y un argumento del inverso de z es el opuesto del argumento de z : el inverso tiene la misma dirección que el conjugado. Usando ese hecho, queda como ejercicio realizar una construcción geométrica para obtener el inverso de z a partir del punto que representa a z en el plano complejo.

2.4. División en forma exponencial. Teniendo las expresiones para el producto y el inverso en forma exponencial, la división resulta directa. En efecto, sean los complejos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, con $r_1 \geq 0$, $r_2 > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = r_1 e^{i\theta_1} r_2^{-1} e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Por lo tanto, el cociente de dos números complejos tiene como módulo el cociente de los módulos, y como argumento la diferencia de los argumentos de dichos números (si el complejo del numerador es 0, el argumento queda indeterminado).

2.5. Potencia entera en forma exponencial. Veamos ahora cómo la consideración de expresiones exponenciales nos permite hacer fácilmente potenciación con exponente entero.

Sean $z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$) y n un número entero (con $z \neq 0$ si $n \leq 0$).

1. Para valores enteros positivos de n , teniendo en cuenta la expresión para el producto en forma exponencial, se comprueba fácilmente por inducción que $z^n = r^n e^{in\theta}$.
2. Para n entero negativo, digamos $n = -k$ con $k > 0$, es:

$$z^n = (z^{-1})^k = (r^{-1}e^{-i\theta})^k = (r^{-1})^k e^{-ik\theta} = r^{-k} e^{i(-k)\theta} = r^n e^{in\theta}$$

3. Cuando el exponente es nulo, $z^0 = 1 = r^0 e^{i0}$.

En resumidas cuentas, para cualquier exponente entero se verifica

$$(1) \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

Es decir que: $|z^n| = |z|^n = r^n$ y $\arg(z^n) = n \arg z = n\theta$.

2.6. Igualdad de complejos en forma exponencial. Cabe preguntarse cómo determinar si son iguales dos números complejos no nulos que están expresados en forma exponencial. Al respecto, es claro que ambos deben tener igual módulo, y, en relación a los argumentos, deben diferir en un múltiplo entero de 2π . Para verlo, notemos primero que, para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que $e^{i\theta} = 1$ si, y sólo si, $\exists k \in \mathbb{Z} : \theta = 2k\pi$. Entonces, para cualesquiera $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} &\iff r_1 = r_2 \wedge e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \iff r_1 = r_2 \wedge e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = 1 \\ &\iff r_1 = r_2 \wedge \exists k \in \mathbb{Z} : \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \end{aligned}$$

3. Radicación

Si z es un número complejo y n es un entero positivo, se dice que el número complejo w es una raíz n -ésima de z , denotado $w = \sqrt[n]{z}$, si ocurre que $w^n = z$.

De la definición, surge que $\sqrt[n]{0} = 0$. Nos preguntamos entonces por $\sqrt[n]{z_0}$ cuando z_0 es un complejo no nulo cualquiera. Es decir, buscamos algún número $w = re^{i\theta}$ tal que $w^n = z_0$. Consideremos a z_0 en su forma exponencial: $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, con $\theta_0 = \text{Arg } z_0$ (aunque igualmente podría considerarse cualquier otro argumento). Debe ocurrir entonces que $r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$, y, por igualdad de números complejos en forma exponencial:

$$\begin{aligned} r^n = r_0 &\Rightarrow r = \sqrt[n]{r_0} \\ n\theta = \theta_0 + 2k\pi &\Rightarrow \theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \text{ cualquiera sea } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Entonces, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_0} e^{i \frac{\text{Arg } z_0 + 2k\pi}{n}}$ donde k es cualquier entero. Podría parecer que hay infinitas raíces n -ésimas, correspondientes a los infinitos valores que puede tomar k . Sin embargo, queda de ejercicio demostrar que para $k = m + n$ se obtiene el mismo valor que para $k = m$, y que n valores distintos consecutivos para k producen distintos números complejos. En consecuencia, sólo es necesario tomar n valores consecutivos para k (por ejemplo, $0, 1, \dots, n-1$), y reemplazarlos en la fórmula de las raíces n -ésimas, para generar todas las raíces posibles.

En resumen, si $z = |z| e^{i \text{Arg } z}$,

$$(2) \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{Arg } z + 2k\pi}{n}}; \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Es decir, $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$ y $\arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{\text{Arg } z + 2k\pi}{n}; \quad k = 0, 1, \dots, n-1$

Esto nos dice que existen n raíces n -ésimas distintas de cualquier número complejo distinto de cero. Todas tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$. El valor que corresponde a $k = 0$ se denomina la **determinación principal de $\sqrt[n]{z}$** , o la **raíz n -ésima principal de z** .

Geométricamente, cuando n es mayor que dos, las raíces n -ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados, inscripto en un círculo con centro en el origen y radio igual a la raíz n -ésima de $|z|$. La dirección del complejo correspondiente a uno de los vértices es $\frac{\text{Arg } z}{n}$.

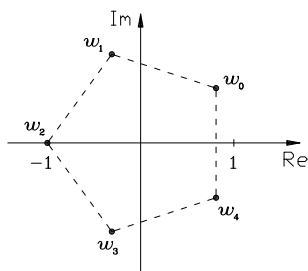
EJEMPLO 1.2. Calcular $\sqrt[5]{-1}$.

El módulo de cualquier $\sqrt[5]{-1}$ es $r = \sqrt[5]{|-1|} = 1$, y sus argumentos son $\frac{\pi + 2k\pi}{5}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Por tanto, las cinco raíces quintas de -1 son:

$$\begin{aligned} k &= 0: w_0 = e^{i\frac{\pi}{5}} = \cos \frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \\ k &= 1: w_1 = e^{i\frac{3\pi}{5}} = \cos \frac{3\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{5} \\ k &= 2: w_2 = e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi \\ k &= 3: w_3 = e^{i\frac{7\pi}{5}} = \cos \frac{7\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{5} \\ k &= 4: w_4 = e^{i\frac{9\pi}{5}} = \cos \frac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{5} \end{aligned}$$

Estas cinco raíces son vértices de un pentágono regular, como se observa en la siguiente figura.



Pentágono determinado por $\sqrt[5]{-1}$

□

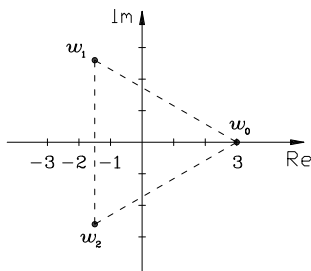
EJEMPLO 1.3. Calcular $\sqrt[3]{27}$.

El módulo de cualquier $\sqrt[3]{27}$ es $r = 3$, y sus argumentos son $\theta = \frac{2k\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$.

Por tanto, las tres raíces cúbicas de 27 son:

$$\begin{aligned} k &= 0: w_0 = 3e^{i0} = 3(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 3 \\ k &= 1: w_1 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}} = 3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3} \\ k &= 2: w_2 = 3e^{i\frac{4\pi}{3}} = 3\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Estas tres raíces son vértices de un triángulo equilátero, como se observa en la siguiente figura.



Triángulo determinado por $\sqrt[3]{27}$

□

A veces se denota también a $\sqrt[n]{z}$ como $z^{1/n}$. También es posible definir expresiones como la anterior, pero en las cuales el exponente es fraccionario, del siguiente modo: para m y n enteros positivos coprimos,

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{z^m}$$

teniéndose que, para $z = re^{i\theta}$ es

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{r^m} e^{i(m\theta + 2km\pi)/n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

4. La expresión exponencial e^z . Logaritmos en \mathbb{C}

Para cualquier $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se define la **exponencial** e^z mediante

$$(3) \quad e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Podemos notar que

$$|e^z| = e^x \quad \arg e^z = y$$

EJEMPLO 1.4. $e^{3-2i} = e^3 (\cos(-2) + i \sin(-2)) \simeq -8.3585 - 18.264i$. □

Dejamos como ejercicio probar las siguientes propiedades:

1. $\forall z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0$
2. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
3. $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$
4. $e^z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$
5. $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^z)^n = e^{nz}$

Un **logaritmo** de un número complejo $z_0 \neq 0$, denotado $\ln z_0$, es cualquier número w que satisface $e^w = z_0$ (la razón para excluir al 0 es que no existe w tal que $e^w = 0$).

Supongamos que el argumento principal de z_0 es θ_0 . Consideremos a w en forma binómica, es decir, $w = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces, debe cumplirse que $e^{x+iy} = z_0$, es decir,

$$e^x e^{iy} = |z_0| e^{i\theta_0}$$

de donde, por igualdad de complejos en forma exponencial, debe ser

$$x = \ln |z_0| \quad y = \theta_0 + 2k\pi$$

en donde k representa a cualquier entero.

Resumiendo, obtenemos la siguiente expresión, válida para cualquier $z \neq 0$:

$$(4) \quad \ln z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \text{ en donde } k \text{ es cualquier entero}$$

La expresión (4) arroja infinitos valores complejos distintos. De todos ellos, el valor que corresponde a $k = 0$ se denomina la **determinación principal del logaritmo de z** , o el **logaritmo principal de z** , denotado $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \quad \text{con} \quad -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

EJEMPLO 1.5. Calcular $\ln(-1)$ y $\ln(5-12i)$.

1. $\ln(-1) = \ln|-1| + i\pi + i2k\pi = i(\pi + 2k\pi)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\ln(5-12i) = \ln|5-12i| + i \arctan\left(-\frac{12}{5}\right) + i2k\pi \cong \ln 13 - 1.176i + i2k\pi \cong 2.5649 - 1.176i + 6.2832ik$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

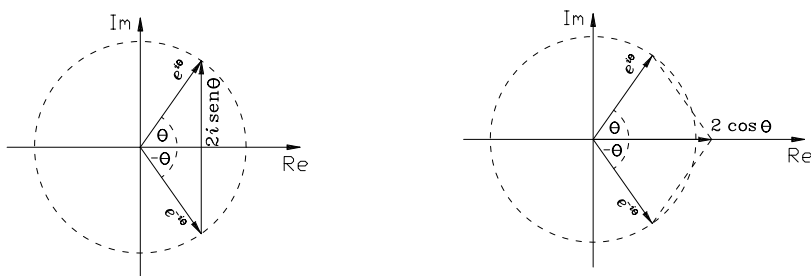
□

5. Expresiones trigonométricas y sus inversas

De la fórmula de Euler, deducimos las siguientes expresiones, válidas para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Entonces, podemos construir el seno y el coseno desde la función exponencial, como se observa en la siguiente figura.



Luego, es natural definir, para cualquier $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Las expresiones trigonométricas restantes se definen de la siguiente manera:

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \text{ para } \cos z \neq 0 \quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} \text{ para } \operatorname{sen} z \neq 0$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \text{ para } \cos z \neq 0 \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \text{ para } \operatorname{sen} z \neq 0$$

Nótese que si z fuese un real, las expresiones definidas coinciden con las conocidas expresiones trigonométricas para números reales.

Como ejercicio, verificar que, de acuerdo a las definiciones anteriores, se cumple que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z \pm w) &= \operatorname{sen} z \cos w \pm \cos z \operatorname{sen} w & \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= 1 \\ \cos(z \pm w) &= \cos z \cos w \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w & \operatorname{sen}^2 z &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2z) \\ \operatorname{sen}(-z) &= -\operatorname{sen} z & \cos(-z) &= \cos z \\ \operatorname{sen}(2z) &= 2 \operatorname{sen} z \cos z & \cos(2z) &= \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \cos z & \operatorname{sen} z = 0 &\iff z = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Una diferencia fundamental con las funciones trigonométricas sobre números reales es que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ no están restringidas sólo al intervalo $[-1, 1]$, sino que pueden tomar cualquier valor (real o complejo). Por ejemplo, dado $z \in \mathbb{C}$, si queremos encontrar w tal que $\cos w = z$, podemos plantear:

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{(e^{iw})^2 + 1}{2e^{iw}}$$

por lo que debe ser

$$(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

Mediante la sustitución $u = e^{iw}$, resolvemos la ecuación cuadrática $u^2 - 2zu + 1 = 0$, con solución $u = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (deben considerarse las dos raíces cuadradas). Por lo tanto,

$$\cos w = z \iff w = -i \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

en donde puede considerarse cualquiera de las raíces de $z^2 - 1$ y cualquiera de los logaritmos de $z + \sqrt{z^2 - 1}$. Es decir, una cantidad infinita de valores de w satisfacen $\cos w = z$. Cada uno de tales valores se denomina un **arco-coseno de z** , y se denota por $\arccos z$. Similarmente, se definen las otras *expresiones trigonométricas inversas*, arco-seno de z , arco-tangente de z , etc.

6. Expresiones hiperbólicas y sus inversas

Las **expresiones hiperbólicas** se definen del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\sinh z} \quad (z \neq n\pi i) \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\cosh z} \quad (z \neq (n + \frac{1}{2})\pi i) \\ \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad (z \neq (n + \frac{1}{2})\pi i) & \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad (z \neq n\pi i) \end{aligned}$$

(en todos los casos, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Puede verificarse fácilmente que $\sinh(iz) = i \sin z$ y que $\cosh(iz) = \cos z$, de donde, empleando propiedades de expresiones trigonométricas, se pueden deducir varias propiedades de las expresiones hiperbólicas, tales como $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, $\sinh(z \pm w) = \sinh z \cosh w \pm \cosh z \sinh w$, $\sinh^2 z + \cosh^2 z = \cosh(2z)$, etc.

El **arco-coseno hiperbólico** de z , denotado $\operatorname{arc} \cosh z$, se define como cualquier número complejo w tal que $\cosh w = z$. Del hecho de que $\cosh w = \cos(-iw)$, se tiene que

$$\cosh w = z \iff \cos(-iw) = z \iff -iw = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \iff w = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

Es decir, $\operatorname{arc} \cosh z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$, expresión que arroja una infinidad de valores, cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$.

De manera análoga, se definen y calculan las otras expresiones hiperbólicas inversas.

7. Potenciación en general

En secciones anteriores, vimos cómo calcular z^a para $z \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{Z}$, y para $z = e$ y $a \in \mathbb{C}$. Ahora consideraremos el caso general en que la base es un complejo distinto de e y el exponente sea complejo.

Sean $z, a \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$ y $z \neq e$. La expresión exponencial generalizada se define como

$$(5) \quad z^a = e^{a \ln z}$$

y puede escribirse de la forma:

$$z^a = e^{a(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z + i2k\pi)} \text{ con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dejamos como ejercicio demostrar que z^a tiene

1. un solo valor si a es un entero, que coincide con lo definido en la fórmula (1), para potencias enteras de un número complejo.
2. un número finito de valores si a es un racional. En particular $z^{\frac{1}{n}}$ coincide con $\sqrt[n]{z}$, definido a través de la expresión (2).

OBSERVACIÓN 1.6. Tener en cuenta que la expresión (5) sólo vale para $z \neq e$, y que e^a es una expresión univaluada que se calcula según la fórmula (3).

EJEMPLO 1.7. Mostrar que: $(1-i)^2$ tiene un solo valor, $(-1-i)^{\frac{3}{5}}$ tiene cinco valores distintos y 125^{1-3i} tiene infinitos valores.

1. En relación a $(1-i)^2$:

$$\begin{aligned} (1-i)^2 &= e^{2 \ln(1-i)} = e^{2(\ln \sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} + i2k\pi)} = e^{\ln 2} e^{2(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i} = e^{\ln 2} e^{-\frac{\pi}{2}i} (e^{2k\pi i})^2 \\ &= 2e^{-\frac{\pi}{2}i} (1)^2 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = -2i \end{aligned}$$

De la expresión $e^{\ln 2} e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{4k\pi i}$ ya podemos deducir que el valor de $(1-i)^2$ es sólo uno porque $e^{4k\pi i} = 1$, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2. En relación a $(-1-i)^{\frac{3}{5}}$:

$$(-1-i)^{\frac{3}{5}} = e^{\frac{3}{5} \ln(-1-i)} = e^{\frac{3}{5}(\ln \sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4} + i2k\pi)} = e^{\frac{3}{5} \ln \sqrt{2} - \frac{9\pi}{20}i} e^{\frac{6k\pi}{5}i}$$

donde $e^{\frac{6k\pi}{5}i}$ toma sólo cinco valores distintos, para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (por ejemplo, $k = 5$ produce el mismo valor que $k = 0$), por lo que $(-1 - i)^{\frac{3}{5}}$ tendrá nada más que cinco valores distintos.

3. En relación a 125^{1-3i} :

$$\begin{aligned} 125^{1-3i} &= e^{(1-3i)(\ln 125 + i2k\pi)} = e^{(\ln 125 + 6k\pi)} e^{i(-3 \ln 125 + 2k\pi)} \\ &= e^{(\ln 125 + 6k\pi)} e^{i(-3 \ln 125)} e^{i2k\pi} = e^{(\ln 125 + 6k\pi)} e^{i(-3 \ln 125)} \end{aligned}$$

Dado que $e^{(\ln 125 + 6k\pi)}$ tiene un valor distinto para cada $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 125^{1-3i} toma infinitos valores. \square

EJERCICIOS

- Obtener z tal que $(2 - i)z + (3, -1) = 2\bar{z}$
- Dados $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3$ y $z_3 = -2 + i$, obtener $z_1 + z_2$, $z_3 - z_1$, $z_1 + z_2\bar{z}_3$, $z_1\bar{z}_1$, $\text{Im}(z_1\bar{z}_3)$, z_3^2 , z_3/z_1 y \bar{z}_1^2 . Graficar.
- Mostrar que $(\mathbb{C}, +)$ y $(\mathbb{C} - \{0\}, \times)$ son grupos conmutativos, y que el producto de complejos es distributivo respecto de la suma.
- Mostrar que el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, con las operaciones habituales de suma y producto de matrices, es isomorfo al cuerpo de los números complejos.
- Mostrar que \mathbb{C} tiene estructura de espacio vectorial, con la suma habitual de complejos y la multiplicación por escalar dada por $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ ($\lambda, a, b \in \mathbb{R}$).
- Realizar una construcción geométrica para obtener el inverso de z a partir del punto que representa a z en el plano complejo.
- Justificar las siguientes propiedades, válidas para todos $z, w \in \mathbb{C}$:
 - $\text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$
 - $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
 - $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ ($w \neq 0$)
 - $|z - w| \geq ||z| - |w||$
- Para $n = 1, 2, \dots, 10$, obtener i^{-n} . ¿Cómo se obtiene i^n para $n \in \mathbb{Z}$?
- Si z es un número complejo, ¿son siempre conjugados los complejos $z + 2i$ y $z - 2i$? ¿O es necesario imponer condiciones a z ?
- Para $z = x + iy$, encuentre el módulo de $(3z + i)/(3z - i)^2$ en términos de x e y .
- Suponga que $z \in \mathbb{C}$ satisface que $|z - 1| \leq |z + 1|$. Pruebe que entonces se satisface que $|\bar{z} - 1| \leq |\bar{z} + 1|$.
 - Visualice gráficamente que cualquier complejo del primer cuadrante (incluyendo los semiejes) satisface que $|z - 1| \leq |z + 1|$, mientras que los del segundo cuadrante no. Pruébalo analíticamente.
 - Encuentre todos los complejos z que satisfacen la expresión $|z - 1| \leq |z + 1|$.
- Sean z_1 , z_2 y z_3 complejos con $z_1 \neq z_2$. Muestre que los tres están sobre una misma recta si, y sólo si, $(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1)$ es un número real.
- Interpretar gráficamente y demostrar la **igualdad del paralelogramo**:

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

- Mostrar que si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ y $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, entonces z_1 , z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unitaria.
- Mostrar el Teorema del Binomio: para complejos cualesquiera z, w y cualquier entero positivo n ,

$$(z + w)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} w^j$$

- Expresar en forma exponencial los siguientes complejos:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } z_1 = \frac{i}{-2-2i} & \text{b) } z_2 = (1 - i^6)(\sqrt{3}i)^{-1} & \text{c) } z_3 = z_1^5 & \text{d) } z_4 = z_2 z_3 \\ \text{e) } z_5 = \frac{z_4}{z_1} & \text{f) } z_6 = (1 + i)^2 & \text{g) } z_7 = (1, -2) & \text{h) } z_8 = z_6^3 z_7^2 \end{array}$$

17. En relación al ejercicio anterior, calcular $z_3^5, z_3^{-5}, z_1^{1/4}, z_7^8, z_7^{-4}, z_7^{1/3}, z_7^{2/3}$.
18. Hallar $\sqrt[4]{-1}$ y $\sqrt[5]{1}$, mediante fórmula de radicación. Graficar.
19. Calcular:
- $e^{2\pi i}, e^{1+\frac{\pi}{4}i}, e^{2+5\pi i}, -3e^{\frac{\pi}{3}i}$, sabiendo que $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.
 - $\ln e, \ln i, \ln(ei), \ln(-1-i)$, empleando la fórmula $\ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$.
 - $(2i)^{\frac{1}{2}}, (1+i)^i, (1-i)^{1+i}, (-1)^{1/4}$ y $1^{1/5}$ mediante $a^w = e^{w \ln a}$. Comparar los dos últimos resultados con el ejercicio anterior.
20. a) Especifique el valor del módulo y un argumento de $e^{i\theta}$ para $\theta \in \mathbb{R}$.
 b) Especifique el valor del módulo y un argumento de $e^{i\theta}$ para $\theta \in \mathbb{C}$.
21. Resolver en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones: $\cos(iz) = -2$, $\operatorname{sen} z = 0$, $\operatorname{senh} z = 0$, $e^z + i = 0$, $\ln(z+i) = 0$.
22. Probar las siguientes identidades, con $z \in \mathbb{C}$:
- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| a) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ | b) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ |
| c) $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$ | d) $\operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen} z \cos z$ |
| e) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$ | f) $\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$ |

LA TOPOLOGÍA USUAL DE LOS COMPLEJOS

Habiendo establecido en el capítulo anterior las propiedades y operaciones básicas del conjunto de los complejos (en particular, la noción de distancia entre dos números en el plano complejo), nos proponemos, en lo sucesivo, realizar un estudio de funciones cuyo dominio de definición es algún subconjunto de los complejos, y extender a ellas las ideas de límites, derivación e integración aprendidas para las funciones de variable real. En los cursos previos de cálculo, en los que se aprendieron esos conceptos, la idea de *distancia* entre números reales ($|a - b|$) fue relevante, permitiendo definir en base a ella la noción de conjunto abierto, cerrado, clausura, etc. Veremos aquí cómo, de manera análoga, la distancia entre complejos da pie a extender esos conceptos a ese conjunto, deduciendo varias propiedades que serán útiles posteriormente.

1. La distancia euclídea en el plano complejo. Conjuntos abiertos y cerrados

DEFINICIÓN 2.1. La **distancia euclídea** en el plano complejo es la función de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ en \mathbb{R} que, a cada pareja (z_1, z_2) de números complejos, asigna el número real no negativo $|z_2 - z_1|$.

Como vemos, la distancia euclídea entre dos complejos z_1 y z_2 es la longitud del segmento del plano que va desde z_1 hasta z_2 .

Son varias las propiedades de las que goza la distancia euclídea en \mathbb{C} . Aquí ofrecemos cinco de ellas, tan relevantes que constituyen una base sobre la que se pueden deducir las otras.

1. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 - z_2| \geq 0$ (la distancia entre dos complejos es un número no negativo).
2. $\forall z \in \mathbb{C}, |z - z| = 0$ (la distancia desde un punto a sí mismo es 0).
3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2 \Rightarrow |z_1 - z_2| > 0$ (la distancia desde un punto a otro punto distinto es estrictamente positiva).
4. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ (simetría: la distancia es la misma de ida que de vuelta).
5. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, |z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$ (desigualdad triangular: la distancia puede ser más larga si pasamos por un tercer punto).

Las propiedades 2 y 3 se pueden resumir en una sola, como sigue:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 - z_2| = 0 \iff z_1 = z_2$$

Nótese que todas las propiedades anteriores son extensiones de las correspondientes propiedades de valor absoluto en el campo de los números reales.

Con la noción de distancia así establecida, pasamos a la siguiente definición crucial.

DEFINICIÓN 2.2. Para $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, el **entorno de radio r alrededor de z_0** es $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$. El **entorno reducido de radio r alrededor de z_0** es $B_r^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$.

O sea que $B_r(z_0)$ está constituido por todos los complejos que están a distancia estrictamente menor que r de z_0 (esto incluye, por supuesto, al propio z_0 , que se denomina el centro del entorno). Geométricamente, $B_r(z_0)$ es el interior del disco de radio r con centro en z_0 . El entorno reducido consiste en todos los puntos del entorno, excepto el centro: $B_r^*(z_0) = B_r(z_0) - \{z_0\}$.

Recalquemos que todo entorno tiene radio estrictamente positivo. Obsérvese también que, en el universo de los complejos, $B_{r_1}(z_0) \subset B_{r_2}(z_0) \iff r_1 \leq r_2$.

Ahora presentamos otras definiciones que van a resultar familiares, y a las que apelaremos bastante en lo sucesivo.

DEFINICIÓN 2.3. Sea z un número complejo, y sea E un subconjunto de \mathbb{C} .

1. z es **punto de acumulación de E** si todo entorno reducido de z contiene un punto de E . Es decir, $\forall r > 0, B_r^*(z) \cap E \neq \emptyset$, o, equivalentemente, $\forall r > 0, (B_r(z) - \{z\}) \cap E \neq \emptyset$, que es lo mismo que decir $\forall r > 0, B_r(z) \cap (E - \{z\}) \neq \emptyset$. Designamos por E' al conjunto de todos los puntos de acumulación de E . Observar que un punto de acumulación de E puede o no pertenecer a E .
2. E es **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir, si $E' \subset E$.
3. La **clausura de E** es $\overline{E} = E \cup E'$, es decir, la unión del conjunto y sus puntos de acumulación.
4. Si $z \in E$ pero z no es punto de acumulación de E , z se llama **punto aislado de E** .
5. z es un **punto interior de E** si existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_r(z) \subset E$. El conjunto de todos los puntos interiores de E , denotado por E° , se llama el **interior de E** . Observar que un punto interior de E debe necesariamente pertenecer a E ; es decir, $E^\circ \subset E$.
6. E es **abierto** si todos sus puntos son interiores, es decir, si $E^\circ = E$.
7. z es un **punto frontera de E** si para todo $r \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $B_r(z) \cap E \neq \emptyset$ y $B_r(z) \cap E^c \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos frontera de E , denotado ∂E , se llama la **frontera de E** . Observar que un punto frontera de E puede o no pertenecer a E .
8. E es **acotado** si existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $E \subset B_r(0)$.
9. E es **denso en \mathbb{C}** si $\overline{E} = \mathbb{C}$.
10. El **diámetro de E** es $\text{diam}(E) = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E\}$. ⁽¹⁾

Desarrollaremos ahora algunas de las propiedades más elementales de los subconjuntos de \mathbb{C} .

PROPOSICIÓN 2.4. *Todo entorno es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $B_r(z)$ un entorno en \mathbb{C} . Para $z_1 \in B_r(z)$, tomemos $r' = r - |z - z_1|$. Será $r' > 0$ pues $|z - z_1| < r$. Veamos que $B_{r'}(z_1) \subset B_r(z)$: si $z_2 \in B_{r'}(z_1)$, $|z - z_2| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_2| < |z - z_1| + r' = r$, de donde $z_2 \in B_r(z)$. Luego todo punto de $B_r(z)$ es un punto interior de $B_r(z)$, por lo que $B_r(z)$ es abierto. \square

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea E un subconjunto de \mathbb{C} . Un complejo z pertenece a \overline{E} si, y sólo si, cualquier entorno de z contiene al menos un punto de E .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $z \in \overline{E}$. Si $z \in E$, cualquier entorno de z contiene al propio z , que es un punto de E . Si $z \notin E$, z es punto de acumulación de E , por lo que $\forall r > 0, B_r(z) \cap (E - \{z\}) \neq \emptyset$; pero como en este caso se tiene que $E = E - \{z\}$ (pues $z \notin E$), resulta que $\forall r > 0, B_r(z) \cap E \neq \emptyset$, es decir, todo entorno de z posee un punto de E .

Recíprocamente, supongamos que cualquier entorno de z contiene un punto de E . Si $z \in E$, $z \in \overline{E}$. Si $z \notin E$, tenemos que $E = E - \{z\}$, por lo que cualquier entorno de z posee un punto de $E - \{z\}$; luego z es punto de acumulación de E , y $z \in \overline{E}$. \square

PROPOSICIÓN 2.6. *Si z es punto de acumulación de E , todo entorno de z posee infinitos puntos de E .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que existe $r > 0$ tal que $B_r(z)$ contiene una cantidad finita de puntos de E . Si $B_r^*(z) \cap E = \emptyset$, z no cumple la definición de punto de acumulación de E . Si $B_r^*(z) \cap E \neq \emptyset$, sea $r' = \min\{|z - z_1| : z_1 \in B_r^*(z) \cap E\}$. r' es el más chico de un conjunto

¹Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que $t \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de A si $\forall x \in A, x \leq t$. Si A tiene una cota superior, se dice que A es **acotado superiormente**, y se define el **supremo** de A como la menor de las cotas superiores de A (se puede demostrar, aunque no fácilmente, que tal definición es buena). Si A no tiene cota superior, decimos que el supremo de A es ∞ . Como ejercicio, verificar que para cualquier $A \subset \mathbb{R}$: (a) El supremo de A es único. (b) $\sup A \leq k \iff \forall x \in A, x \leq k$. (c) Si $k \in \mathbb{R}$ y existe $x \in A$ tal que $x \geq k$, entonces $\sup A \geq k$. (d) Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, entonces $\sup A \leq \sup B$. (e) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \sup A - \varepsilon < x \leq \sup A$. (f) Si $B \subset \mathbb{R}$ y hacemos $C = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, entonces $\sup C \leq \sup A + \sup B$.

finito (pues $B_r(z) \cap E$ es finito) de números positivos, por lo que $r' > 0$. Tendremos que $B_{r'}(z)$ no contiene puntos de $E - \{z\}$, por lo que z tampoco es punto de acumulación de E . \square

COROLARIO 2.7. *Los subconjuntos finitos de \mathbb{C} no poseen puntos de acumulación.*

TEOREMA 2.8. *Un subconjunto de \mathbb{C} es abierto si, y sólo si, su complemento es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que E es un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Sea $z \in E$. Existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset E$, luego $B_r(z) \cap E^c = \emptyset$, por lo que z no es punto de acumulación de E^c . Tenemos entonces que si $z \in E$, z no es punto de acumulación de E^c , que equivale a decir que si z es punto de acumulación de E^c , z pertenece a E^c , mostrando que E^c es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que E^c es cerrado. Sea $z \in E$, es decir, $z \notin E^c$. z no es punto de acumulación de E^c , por lo que existe un entorno $B_r(z)$ que no contiene puntos de $E^c - \{z\}$. Pero ya que $z \in E$, resulta $E^c - \{z\} = E^c$, por lo que $B_r(z) \cap E^c = \emptyset$, es decir, $B_r(z) \subset E$. Luego z es punto interior a E , y E es abierto. \square

COROLARIO 2.9. *Un subconjunto de \mathbb{C} es cerrado si, y sólo si, su complemento es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. E es cerrado $\iff (E^c)^c$ es cerrado $\iff E^c$ es abierto. \square

TEOREMA 2.10. *En relación a uniones e intersecciones de conjuntos, las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
2. *La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
3. *La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*
4. *La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ una familia cualquiera de subconjuntos abiertos de \mathbb{C} . Si $z \in \bigcup_{k \in \Lambda} A_k$, existe $k_0 \in \Lambda$ tal que $z \in A_{k_0}$, luego hay un entorno $B_r(z) \subset A_{k_0} \subset \bigcup_{k \in \Lambda} A_k$, lo que muestra que $\bigcup_{k \in \Lambda} A_k$ es abierto. Esto prueba la primera afirmación.

Sea $\{A_k\}_{k=1}^n$ una familia finita de subconjuntos abiertos, y $z \in \bigcap_{k=1}^n A_k$. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, existe un $r_k > 0$ tal que $B_{r_k}(z) \subset A_k$. Sea $r = \min\{r_k : k = 1, \dots, n\}$. Será $r > 0$. Verifiquemos que $B_r(z) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$: para todo $z_1 \in \mathbb{C}$ con $|z - z_1| < r$, será $|z - z_1| < r_k$ cualquiera sea $k \in \{1, \dots, n\}$ por la elección de r , por lo que $z_1 \in B_{r_k}(z) \subset A_k$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, de donde $z_1 \in \bigcap_{k=1}^n A_k$. Por lo tanto $\bigcap_{k=1}^n A_k$ es abierto. Esto muestra la segunda afirmación. Un ejemplo que muestra que la afirmación no es válida para intersecciones arbitrarias es $A_k = B_{\frac{1}{k}}(0)$ para $k \geq 1$, pues se tiene que $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$, que no es un subconjunto abierto de \mathbb{C} .

Sea $\{C_k\}_{k \in \Lambda}$ una familia cualquiera de subconjuntos cerrados de \mathbb{C} . Por las leyes de De Morgan, se tiene que $(\bigcap_{k \in \Lambda} C_k)^c = \bigcup_{k \in \Lambda} C_k^c$, siendo este último un conjunto abierto, según se demostró en el primer ítem, ya que cada C_k^c es un conjunto abierto. Luego $\bigcap_{k \in \Lambda} C_k$ es un conjunto cerrado. Esto demuestra la tercera afirmación.

Finalmente, sea $\{C_k\}_{k=1}^n$ una familia finita de subconjuntos cerrados. Será $(\bigcup_{k=1}^n C_k)^c = \bigcap_{k=1}^n C_k^c$ un conjunto abierto según el inciso segundo de este teorema, por lo que $\bigcup_{k=1}^n C_k$ es cerrado. \square

TEOREMA 2.11. *Un subconjunto de \mathbb{C} es abierto si, y sólo si, es una unión de entornos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que E es un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Entonces podemos asociar a cada punto z de E un número positivo r_z tal que $B_{r_z}(z) \subset E$. Veamos que $E = \bigcup_{z \in E} B_{r_z}(z)$: si $z_1 \in E$, $z_1 \in B_{r_{z_1}}(z_1) \subset \bigcup_{z \in E} B_{r_z}(z)$, luego $E \subset \bigcup_{z \in E} B_{r_z}(z)$. Y si $z_1 \in \bigcup_{z \in E} B_{r_z}(z)$, hay un z de E tal que $z_1 \in B_{r_z}(z)$; pero por la definición de r_z , es $B_{r_z}(z) \subset E$, de donde $z_1 \in E$; con esto, $\bigcup_{z \in E} B_{r_z}(z) \subset E$.

La vuelta se deduce de la proposición 2.4 y del teorema 2.10. \square

El siguiente teorema nos dice que la clausura de un conjunto E es “el más pequeño” de los conjuntos cerrados que contienen a E .

TEOREMA 2.12. *Sea E un subconjunto de \mathbb{C} .*

1. \overline{E} es un subconjunto cerrado.
2. $E = \overline{E}$ si, y sólo si, E es cerrado.
3. Si $E \subset F$ y F es cerrado, entonces $\overline{E} \subset F$.
4. $\text{diam}(\overline{E}) = \text{diam}(E)$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Mostraremos que el complemento de \overline{E} es abierto. Sea $z \in \overline{E}^c$, luego $z \notin \overline{E}$, por lo que existe $r > 0 : B_r(z) \cap E = \emptyset$ (prop. 2.5). Como $B_r(z)$ es abierto (prop. 2.4), para cada $z_1 \in B_r(z)$ existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(z_1) \subset B_r(z)$, y entonces $B_{r_1}(z_1) \cap E = \emptyset$, por lo que $z_1 \notin \overline{E}$. Entonces $B_r(z) \subset \overline{E}^c$. Ya que z es arbitrario, se sigue que \overline{E}^c es un conjunto abierto.
2. La ida es inmediata por el inciso anterior. Para la vuelta, siendo E cerrado, se tiene que $E' \subset E$, por lo que $\overline{E} = E \cup E' = E$.
3. Primero observemos que si $E \subset F$, debe ser $E' \subset F'$: si $z \in E', \forall r > 0, \exists z_1 \in E : |z - z_1| < r$ con $z_1 \notin F$. Pero también $z_1 \in F$ pues $E \subset F$. Por lo tanto $z \in F'$. Con esto podemos ver que $\overline{E} = E \cup E' \subset F \cup F' = F$, es decir, $\overline{E} \subset F$.
4. Puesto que $E \subset \overline{E}$, es directo que $\text{diam}(E) \leq \text{diam}(\overline{E})$. Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos z y z_1 arbitrarios en \overline{E} . Sean $z', z'_1 \in E$ tales que $|z - z'| < \varepsilon/2$ y $|z_1 - z'_1| < \varepsilon/2$ (prop. 2.5). Luego, $|z - z_1| \leq |z - z'| + |z' - z'_1| + |z'_1 - z_1| < \varepsilon + |z' - z'_1| \leq \varepsilon + \text{diam}(E)$. Es decir, $|z - z_1| \leq \varepsilon + \text{diam}(E)$. Como z y z_1 son arbitrarios, se sigue que $\text{diam}(\overline{E}) \leq \varepsilon + \text{diam}(E)$, y, puesto que ε también se eligió arbitrariamente, se deduce que $\text{diam}(\overline{E}) \leq \text{diam}(E)$. \square

1.1. Los reales vistos topológicamente como subconjunto de \mathbb{C} . Los conceptos topológicos relativos a \mathbb{C} aprendidos en la sección previa, son generalizaciones de los mismos conceptos referentes a los reales, con la salvedad de que en \mathbb{C} el universo de trabajo es más grande, y, por lo tanto, los entornos involucran más puntos. Por ejemplo, el entorno de radio 1 alrededor de 0 en el universo de los reales es el conjunto de todos los reales x tales que $-1 < x < 1$, mientras que el entorno de radio 1 alrededor de 0 en el universo de los complejos es todo el disco abierto con centro 0 y radio 1. En general, para $z_0 \in \mathbb{R}$, tenemos que $B_r(z_0) \cap \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : z_0 - r < x < z_0 + r\}$.

Entonces, si A es un subconjunto de \mathbb{R} , frases como “ A es abierto” pueden ser ambiguas si no se aclara en relación a qué universo se hace dicha aseveración. Por ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ es abierto si se ve como subconjunto de \mathbb{R} , pero no si se lo mira como subconjunto de \mathbb{C} . La ambigüedad queda salvada si se especifica a qué universo nos referimos.

Afortunadamente, hay una sencilla relación entre los conjuntos abiertos en el universo de los reales y los abiertos en el universo de los complejos.

TEOREMA 2.13. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. E es abierto en \mathbb{R} si, y sólo si, existe $A \subset \mathbb{C}$ tal que A es abierto en \mathbb{C} y $E = A \cap \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la ida: supongamos que E es abierto en \mathbb{R} . Eso quiere decir que, para cada $x \in E$, existe $r_x > 0$ tal que el intervalo $(x - r_x, x + r_x)$ está contenido en E . Notar que $E = \bigcup_{x \in E} (x - r_x, x + r_x)$. Hagamos $A = \bigcup_{x \in E} B_{r_x}(x)$ (aquí estamos considerando entornos en \mathbb{C} de radio r_x alrededor de x). A es un subconjunto abierto de \mathbb{C} (teor. 2.11). Además, $A \cap \mathbb{R} = (\bigcup_{x \in E} B_{r_x}(x)) \cap \mathbb{R} = \bigcup_{x \in E} (B_{r_x}(x) \cap \mathbb{R}) = \bigcup_{x \in E} (x - r_x, x + r_x) = E$.

Para la vuelta, supongamos que $E = A \cap \mathbb{R}$ para algún conjunto A abierto en \mathbb{C} . Sea $x \in E$. Existe $r > 0 : B_r(x) \subset A$. Entonces $B_r(x) \cap \mathbb{R} \subset A \cap \mathbb{R}$, es decir, $(x - r, x + r) \subset E$, luego E es abierto en \mathbb{R} . \square

LEMA 2.14. *Sean G, E y D subconjuntos de un conjunto universal X , tales que $E \subset D$. Se tiene que $D - E = D \cap G$ si, y sólo si, $E = D \cap G^c$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la ida, si $D - E = D \cap G$, entonces $D \cap E^c = D \cap G$, por lo que $D^c \cup E = D^c \cup G^c$, de donde $D \cap (D^c \cup E) = D \cap (D^c \cup G^c)$, y de allí $D \cap E = D \cap G^c$, es decir, $E = D \cap G^c$.

Para la vuelta, si $E = D \cap G^c$, entonces $E^c = D^c \cup G$, por lo que $D \cap E^c = (D \cap D^c) \cup (D \cap G)$, de donde $D - E = D \cap G$. \square

COROLARIO 2.15. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. E es cerrado en \mathbb{R} si, y sólo si, existe $C \subset \mathbb{C}$ tal que C es cerrado en \mathbb{C} y $E = C \cap \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. E es cerrado en \mathbb{R} si, y sólo si, $\mathbb{R} - E$ es abierto en \mathbb{R} , lo que equivale a que $\mathbb{R} - E = A \cap \mathbb{R}$ para algún A abierto en \mathbb{C} (teor. 2.13), lo que equivale a que $E = A^c \cap \mathbb{R}$ (lema 2.14), siendo A^c el complemento de A en \mathbb{C} , que es un conjunto cerrado en \mathbb{C} . \square

Hemos visto que un conjunto abierto en \mathbb{R} puede no serlo en \mathbb{C} . En cambio, un cerrado en \mathbb{R} es también cerrado visto como subconjunto de \mathbb{C} , y la clave para verlo es el hecho evidente de que un complejo de parte imaginaria no nula no puede ser punto de acumulación de un subconjunto de números reales.

LEMA 2.16. *Si $E \subset \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, entonces $z \notin E'$.*

DEMOSTRACIÓN. Debe ser $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0$. Tomando $r = |y|/2$, es fácil ver que $B_r(z) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, y entonces $B_r^*(z) \cap E = \emptyset$, de donde se deduce el enunciado. \square

COROLARIO 2.17. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. E es cerrado en \mathbb{R} si, y sólo si, E es cerrado en \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos E cerrado en \mathbb{R} . Existe $F \subset \mathbb{C}$ tal que F es cerrado en \mathbb{C} y $E = F \cap \mathbb{R}$ (cor. 2.15). Dado que \mathbb{R} es un subconjunto cerrado de \mathbb{C} (a consecuencia del lema 2.16), por el teorema 2.10 se sigue que E es cerrado en \mathbb{C} .

Recíprocamente, si E es cerrado visto como subconjunto de \mathbb{C} , siendo $E = E \cap \mathbb{R}$ (pues $E \subset \mathbb{R}$), por corolario 2.15 se tiene que E es cerrado en \mathbb{R} . \square

PROPOSICIÓN 2.18. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. La clausura de E en \mathbb{R} es el mismo conjunto que la clausura de E en \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Si x es un real que está en la clausura de E en \mathbb{R} , para cualquier real positivo r se cumple que el intervalo $(x - r, x + r)$ contiene un punto de E , y entonces el entorno (en \mathbb{C}) de radio r alrededor de x contiene un punto de E . Luego, $x \in \overline{E}$ (prop. 2.5).

Para la otra contención, sea $z \in \mathbb{C}$ un punto en \overline{E} . Por el lema 2.16, z debe ser real. Luego, para todo $r > 0$, $B_r(z) \cap E \neq \emptyset$ (prop. 2.5), de donde existe $x \in E$ tal que $z - r < x < z + r$. Entonces, z pertenece a la clausura de E en \mathbb{R} . \square

En lo sucesivo, será de gran utilidad la siguiente propiedad de subconjuntos de números reales.

PROPOSICIÓN 2.19. *Sea E un subconjunto de los reales, y supongamos que E posee cota superior. Entonces el supremo de E pertenece a la clausura de E . Luego, si E es cerrado en \mathbb{R} y acotado superiormente, el supremo de E pertenece a E .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $s = \sup E$. Se tiene que, para todo $r > 0$, el intervalo $(s - r, s + r)$ posee un punto de E (pues sino $s - r$ sería una cota superior para E , pero menor que el supremo, y eso sería una contradicción). Luego, $s \in \overline{E}$. Para probar la última afirmación en el enunciado del teorema, notemos que si E es cerrado en \mathbb{R} , también lo será en \mathbb{C} (cor. 2.17), así que $E = \overline{E}$ (teor. 2.12), por lo que $s \in E$. \square

2. Conjuntos compactos

Estudiaremos ahora una clase de conjuntos que resultará de extrema importancia en el estudio de la teoría de funciones que veremos posteriormente. A pesar de que su definición es un tanto abstracta, llegaremos a ver que los conjuntos de esa clase son fácilmente caracterizables

en el universo de los complejos, además de poseer muchas buenas propiedades, principalmente a los fines del desarrollo de la teoría de integración.

DEFINICIÓN 2.20. Sea $E \subset \mathbb{C}$, Λ un conjunto arbitrario y $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos de \mathbb{C} . Decimos que $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ es un **cubrimiento para E** si $E \subset \bigcup_{k \in \Lambda} A_k$. Si además todos los A_k son conjuntos abiertos, decimos que $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ es un **cubrimiento por abiertos para E** . Un **subcubrimiento** de $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ para E es una subfamilia $\{A_k\}_{k \in \Lambda_1}$ de la familia $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ (es decir, $\Lambda_1 \subset \Lambda$) que también es cubrimiento para E (es decir, $E \subset \bigcup_{k \in \Lambda_1} A_k$). Un cubrimiento es **finito** si posee una cantidad finita de miembros.

Un subconjunto de \mathbb{C} se dice **compacto** si cualquier cubrimiento por abiertos para él posee un subcubrimiento finito.

El siguiente resultado proporciona dos condiciones necesarias para que un subconjunto de \mathbb{C} sea compacto.

TEOREMA 2.21. *Todo subconjunto compacto de \mathbb{C} es cerrado y acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{C} . Mostraremos que K^c es un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Sea $p \in K^c$. Para cada $q \in K$, sea $r_q = |q - p|/2$, y tomemos $W_q = B_{r_q}(q)$. Observar que $K \subset \bigcup_{q \in K} W_q$, por lo que $\{W_q\}_{q \in K}$ es un cubrimiento por abiertos para K . Luego $K \subset \bigcup_{j=1}^n W_{q_j}$ para alguna subfamilia finita $\{W_{q_1}, \dots, W_{q_n}\}$. Sea $r = \min\{r_{q_1}, \dots, r_{q_n}\} > 0$. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $B_r(p) \cap W_{q_j} = \emptyset$ (en caso contrario, habría un z tal que $|p - z| < r$ y $|z - q_j| < r_{q_j}$, de donde $2r_{q_j} = |p - q_j| \leq |p - z| + |z - q_j| < r + r_{q_j} \leq 2r_{q_j}$, contradicción). De allí que $B_r(p) \cap \bigcup_{j=1}^n W_{q_j} = \emptyset$, y entonces $B_r(p) \cap K = \emptyset$, de donde $B_r(p) \subset K^c$. Luego p es un punto interior de K^c , el cual resulta, en consecuencia, ser un conjunto abierto. Por eso, K es cerrado.

Para ver que K es acotado, notemos que la familia de todos los entornos de radio 1 alrededor de los puntos de K es un cubrimiento por abiertos para el compacto K , así que hay una subfamilia finita $\{B_1(z_j)\}_{j=1}^n$ tal que $\bigcup_{j=1}^n B_1(z_j) \supset K$. Definamos $r = 1 + \max\{|z_j| : 1 \leq j \leq n\}$. Sea $z \in K$. z pertenece a $B_1(z_m)$ para algún $m \in \{1, \dots, n\}$, de modo que $|z| \leq |z - z_m| + |z_m| < |z_m| + 1 \leq r$, y entonces $z \in B_r(0)$. Luego, K es acotado. \square

Resulta que las dos condiciones necesarias de la proposición anterior también son suficientes para decidir si un conjunto de números complejos es compacto. Los siguientes resultados apuntan a la demostración de este hecho.

PROPOSICIÓN 2.22. *Todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es un conjunto compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{C} , y F un subconjunto de K que es cerrado en \mathbb{C} . Sea $\Omega = \{A_k\}_{k \in \Lambda}$ una familia de abiertos en \mathbb{C} tal que $F \subset \bigcup_{k \in \Lambda} A_k$. Hagamos $\Omega_2 = \Omega \cup \{F^c\}$; Ω_2 resulta ser una familia de abiertos (pues F es cerrado) que cubre a todo \mathbb{C} : $F^c \cup \bigcup_{k \in \Lambda} A_k \supset F^c \cup F = \mathbb{C}$. En particular, esta nueva familia es un cubrimiento por abiertos para el compacto K , luego hay una subfamilia finita Ω_3 de Ω_2 que cubre a K , y por lo tanto a F . Tomemos $\Omega_4 = \Omega_3 - \{F^c\}$. Puede verse que Ω_4 es una subfamilia finita de Ω que cubre a F (pues Ω_3 lo hacía, y ningún punto de F está en F^c). Luego F es compacto. \square

LEMA 2.23. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$, donde a_n y b_n son reales con $a_n \leq b_n$. Supongamos que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $I_n \supset I_{n+1}$. Entonces, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ es no vacía.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos que E es no vacío y acotado superiormente (por b_0). Hagamos $x = \sup E$. Por definición de supremo, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, es $x \geq a_n$.

Dada la contención de los I_n , deducimos que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, y la $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente. Aprovechemos este hecho para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \leq b_n$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cualquier natural m , tenemos que $a_m \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_n$. Entonces b_n es cota superior para E , de donde $x \leq b_n$.

Por lo tanto, tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, x pertenece a I_n , y, en consecuencia, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, mostrando que este conjunto es no vacío. \square

COROLARIO 2.24. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $R_n = \{z \in \mathbb{C} : a_n \leq \operatorname{Re} z \leq b_n, c_n \leq \operatorname{Im} z \leq d_n\}$, donde a_n, b_n, c_n y d_n son reales con $a_n \leq b_n$ y $c_n \leq d_n$. Supongamos que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $R_n \supset R_{n+1}$. Entonces, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$ es no vacía.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $I_n = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$ e $I'_n = \{x \in \mathbb{R} : c_n \leq x \leq d_n\}$. Dado que $R_n \supset R_{n+1}$, tenemos que $I_n \supset I_{n+1}$ e $I'_n \supset I'_{n+1}$. Luego, existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ e $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I'_n$ (lema 2.23). Entonces, $(x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$. \square

LEMA 2.25. *Sea $R_0 = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b, c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c \leq d$) un rectángulo (relleno) en el plano complejo. Entonces, R_0 es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\delta = |(a, c) - (b, d)|$ (la medida de las diagonales de R_0). Obviamente, para todos $z_1, z_2 \in R_0$, es $|z_1 - z_2| \leq \delta$. Para probar el lema por contradicción, supongamos que hay un cubrimiento por abiertos $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ para R_0 que no admite subcubrimiento finito. Trazando las perpendiculares a cada lado de R_0 por su punto medio, dividámoslo en cuatro rectángulos iguales, R_{00}, R_{01}, R_{10} y R_{11} , de modo que $R_0 = R_{00} \cup R_{01} \cup R_{10} \cup R_{11}$. Al menos uno de ellos (llamémosle R_1) no puede ser cubierto por una subfamilia finita de $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ (de lo contrario, R_0 estaría cubierto por una subfamilia finita de $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$, en contra de la suposición). Las diagonales de R_1 miden $\delta/2$. Apliquemos a R_1 el mismo razonamiento, y continuemos así sucesivamente. Generaremos entonces una familia de rectángulos $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades:

- (a) $R_n \supset R_{n+1}$ para todo n .
- (b) Para cualquier n , ninguna subfamilia finita de $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ cubre a R_n .
- (c) Para cualquier n , las diagonales de R_n miden $\delta/2^n$, de modo que $|z_1 - z_2| \leq \delta/2^n$ cualesquiera sean $z_1, z_2 \in R_n$.

De la condición (a), existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \in R_n$ para todo n (cor. 2.24). Además, por ser $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ cubrimiento para R_0 , existe $k_0 \in \Lambda$ tal que $z \in A_{k_0}$. Puesto que A_{k_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset A_{k_0}$. Sea n lo suficientemente grande como para que $2^{-n}\delta < r$. Del ítem (c), la diagonal de R_n medirá menos que r , por lo que será $R_n \subset B_r(z)$, y en consecuencia A_{k_0} es cubrimiento para R_n , contradiciendo la condición (b). La contradicción provino de suponer que R_0 no es compacto. \square

TEOREMA 2.26. (Heine–Borel) *Un subconjunto de \mathbb{C} es compacto si, y sólo si, es a la vez cerrado y acotado.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema 2.21 demuestra la ida. Para la vuelta, sea E un conjunto cerrado y acotado. Existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \supset E$. Luego, E está contenido en el rectángulo $\{z \in \mathbb{C} : -r \leq \operatorname{Re}(z) \leq r, -r \leq \operatorname{Im}(z) \leq r\}$, que es compacto por el lema 2.25. De allí que, siendo E cerrado, es compacto (prop. 2.22). \square

Cuando se tiene una colección finita E_1, E_2, \dots, E_n de subconjuntos no vacíos de \mathbb{C} cumpliendo la relación de contenciones $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n$, es claro que $\bigcap_{k=1}^n E_k \neq \emptyset$. Sin embargo, si la familia es infinita, aún cumpliéndose la condición $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, la intersección de todos ellos podría *esfumarse* (por ejemplo, si $E_k = B_{1/k}^*(0)$). Pero esto no puede suceder si los E_k son compactos.

PROPOSICIÓN 2.27. *Si $\{K_j\}_{j \in \Lambda}$ es una colección de subconjuntos compactos con la propiedad de que la intersección de cualquier subfamilia finita es no vacía, entonces $\bigcap_{j \in \Lambda} K_j$ es no vacía.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\bigcap_{j \in \Lambda} K_j = \emptyset$. Sea m cualquier elemento de Λ . Sería entonces $\bigcap_{j \in \Lambda} K_j = K_m \cap \bigcap_{j \in \Lambda - \{m\}} K_j = \emptyset$, y entonces $K_m \subset \left(\bigcap_{j \in \Lambda - \{m\}} K_j \right)^c = \bigcup_{j \in \Lambda - \{m\}} K_j^c$. Cada K_j^c es abierto (teor. 2.21), por lo que $\{K_j^c\}_{j \in \Lambda - \{m\}}$ es un cubrimiento por abiertos para

K_m , y, siendo éste compacto, hay una subfamilia finita $\{K_{j_1}^c, \dots, K_{j_n}^c\}$ que cubre a K_m . Es decir, $K_m \subset \bigcup_{q=1}^n K_{j_q}^c = \left(\bigcap_{q=1}^n K_{j_q}\right)^c$, o sea $K_m \cap K_{j_1} \cap \dots \cap K_{j_n} = \emptyset$, contradiciendo la hipótesis. La contradicción provino de suponer que $\bigcap_{j \in \Lambda} K_j = \emptyset$. \square

COROLARIO 2.28. *Si $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección de subconjuntos compactos no vacíos tal que $\forall n \in \mathbb{N}, K_n \supset K_{n+1}$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Además, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(K_n) = 0$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ consta de un solo punto.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Sea $\{K_{n_1}, \dots, K_{n_N}\}$ una subfamilia finita de $\{K_n\}$. Tomemos $m = \max\{n_1, \dots, n_N\}$. Será $\bigcap_{j=1}^N K_{n_j} = K_m \neq \emptyset$. Es decir, cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía. Luego, K es no vacío (prop. 2.27).

Para probar la última afirmación, supongamos que K contuviese más de un punto. Sería $\text{diam}(K) > 0$. Pero para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n \supset K$, de modo que $\text{diam}(K_n) \geq \text{diam}(K)$. Esto contradiría la hipótesis de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(K_n) = 0$. \square

A continuación ofrecemos otra útil caracterización de los conjuntos compactos.

TEOREMA 2.29. *Sea $K \subset \mathbb{C}$. K es compacto si, y sólo si, todo subconjunto infinito de K posee un punto de acumulación en K .*

DEMOSTRACIÓN. Para la ida, sea E un subconjunto infinito de K , y supongamos que ningún punto de K fuese punto de acumulación de E . Entonces, para cada $q \in K$ habría $r_q > 0$ tal que $B_{r_q}(q) \cap E$ contiene a lo sumo un punto de E (q , en el caso en que $q \in E$). La familia $\{B_{r_q}(q)\}_{q \in K}$ es cubrimiento por abiertos para K , pero ninguna subfamilia finita puede cubrir a E (pues E es infinito y cada miembro de la familia tiene a lo sumo un punto de E), por lo que ninguna subfamilia finita puede cubrir a K . Contradicción con la compacidad de K .

Recíprocamente, supongamos que K posee la propiedad de que todo subconjunto infinito de K posee un punto de acumulación en K . Por el Teorema de Heine–Borel, alcanza con ver que K es cerrado y acotado.

- Si K no fuese acotado, para cada entero $n \geq 1$ existiría $z_n \in K$ tal que $|z_n| > n$. Haciendo $E = \{z_n : n \geq 1\}$, tendríamos que $E \subset K$ pero E no tiene ningún punto de acumulación en \mathbb{C} , y por lo tanto tampoco en K , contradiciendo la suposición. La contradicción provino de suponer que K no es acotado.
- Si K no fuese cerrado, existiría $z \in \mathbb{C}$ que es punto de acumulación de K pero no pertenece a K . Entonces, para cada $n \geq 1$, existiría $z_n \in K - \{z\}$ tal que $|z_n - z| < 1/n$. Haciendo $E = \{z_n : n \geq 1\}$, tendríamos que $z \in E'$ (pues dado $r > 0$, se toma $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < r$, resultando $z_n \neq z$ y $|z_n - z| < 1/n < r$) y, en consecuencia, E es infinito (corolario 2.7). Además, tal E no tiene ningún otro punto de acumulación en \mathbb{C} . Para ver esto último, tomemos $z' \neq z$, hagamos $r = |z' - z|/2$ y elijamos N suficientemente grande como para que $r > 1/N$; para todo $n \geq N$, será $|z_n - z| < 1/n \leq 1/N < r$, y entonces $|z' - z_n| = |(z' - z) - (z_n - z)| \geq |z' - z| - |z_n - z| > |z' - z| - r = r$; por lo tanto, $B_r(z')$ contiene a lo sumo una cantidad finita de puntos de E , por lo que z' no es punto de acumulación de E (prop. 2.6).

Habríamos construido entonces un subconjunto infinito de K que no tiene punto de acumulación en K , contradiciendo la hipótesis. La contradicción provino de suponer que K no es cerrado.

Luego, K es cerrado y acotado, por lo que es compacto. \square

TEOREMA 2.30. (Weierstrass) *Todo subconjunto infinito acotado de \mathbb{C} tiene al menos un punto de acumulación en \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea E un subconjunto infinito acotado. E está contenido en un rectángulo R suficientemente grande, que es compacto. Entonces, por el teorema 2.29, E tiene un punto de acumulación en R , y, por lo tanto, un punto de acumulación en \mathbb{C} . \square

El hecho de que dos conjuntos E y F sean disjuntos no garantiza que la distancia entre los puntos de uno y los del otro esté acotada inferiormente por un número estrictamente positivo, aún cuando para todos $z \in E$ y $w \in F$, $d(z, w) > 0$. Por ejemplo, si E es el intervalo real $(0, 1)$ y F el $(1, 2)$, para cualquier $\varepsilon > 0$ pequeño, los números $1 - \varepsilon/4 \in E$ y $1 + \varepsilon/4 \in F$ están a distancia menor que ε . Sin embargo, la siguiente proposición, que será de utilidad posteriormente, expresa que esa situación no puede ocurrir si, además de ser disjuntos, uno es compacto y el otro cerrado.

PROPOSICIÓN 2.31. *Sean K y F subconjuntos de \mathbb{C} , con K compacto y F cerrado. Supongamos que $K \cap F = \emptyset$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todos $z \in K$, $w \in F$, $|z - w| \geq \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $D = F^c$, teniéndose que D es abierto y contiene a K . Para cada $z \in K$, existe $r_z > 0$ tal que $B_{2r_z}(z) \subset D$. La familia de entornos $\{B_{r_z}(z)\}_{z \in K}$ es cubrimiento por abiertos para el compacto K , por lo que existe una subfamilia finita de ella, $\{B_{r_j}(z_j)\}_{j=1}^n$, tal que $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_{r_j}(z_j)$ (cada r_j es positivo, cada z_j es un punto de K y $B_{2r_j}(z_j) \subset D$). Tomemos $\varepsilon = \min\{r_1, \dots, r_n\}$, que será positivo por ser el mínimo de un conjunto finito de números positivos, y veamos que ese número sirve para demostrar lo deseado.

Tomemos $z \in K$ y $w \in F$. Existe $m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z \in B_{r_m}(z_m)$. Como $|z_m - w| \geq 2r_m$ (de lo contrario, $w \in F$ y $w \in B_{2r_m}(z_m) \subset F^c$, que sería una contradicción), tenemos que

$$|z - w| = |(z - z_m) + (z_m - w)| \geq |w - z_m| - |z - z_m| \geq 2r_m - r_m = r_m \geq \varepsilon$$

□

3. Conjuntos conexos. Dominios y regiones en \mathbb{C} .

DEFINICIÓN 2.32. Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ se dice **disconexo** si existen dos conjuntos A_1 y A_2 que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

1. A_1 y A_2 son abiertos.
2. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
3. $A \subset A_1 \cup A_2$
4. $A \cap A_1 \neq \emptyset \neq A \cap A_2$

Si A no es disconexo, se dice que es **conexo**. Un conjunto se dice **totalmente disconexo** si los únicos subconjuntos no vacíos de él que son conexos constan de un único punto. Un **dominio** es un subconjunto del plano que es a la vez abierto y conexo. Una **región** es la unión de un dominio con algún subconjunto de la frontera de ese dominio.

Generalmente, una buena estrategia para demostrar que un conjunto A es **conexo** es tomar conjuntos A_1, A_2 que satisfagan tres (cualesquiera) de las cuatro condiciones dadas más arriba, y mostrar que la restante no puede cumplirse.

Intuitivamente, un conjunto conexo consta de una sola pieza, mientras que un conjunto disconexo está compuesto de partes contenidas en abiertos disjuntos. Con estas ideas en mente, resulta aceptable que, por ejemplo, cualquier intervalo de números reales es conexo. Demostremos ésto, de acuerdo a la definición que dimos de conexidad, para el caso de los intervalos cerrados (para los otros tipos de intervalos, la demostración es análoga).

PROPOSICIÓN 2.33. *Sean a, b números reales, con $a < b$. Sea $I = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, a \leq \operatorname{Re} z \leq b\}$. Entonces I es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean A_1 y A_2 abiertos disjuntos tales que $I \cap A_1 \neq \emptyset \neq I \cap A_2$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $b \in A_2$.

Hagamos $S = I \cap A_1$ y llamemos $s = \sup S$. Dado que $S \neq \emptyset$, tomemos cualquier $x \in S$ (debiendo ser $x < b$, pues $A_1 \cap A_2 = \emptyset$).

Como A_2 es abierto, existe $r > 0$ (y debe ser menor o igual que $b - x$) tal que $B_r(b) \subset A_2$, por lo que A_2 contiene no sólo a b , sino a todo el subsegmento $(b - r, b]$ de I . Por ser A_1 y A_2

disjuntos, esto implica que S es un subconjunto (no vacío) del intervalo cerrado $[a, b - r]$, así que $a \leq s \leq b - r$.

- Supongamos $s \in A_1$. Siendo A_1 abierto, existiría $\delta > 0$ tal que $B_\delta(s) \subset A_1$. Tal δ puede elegirse menor que r , por lo que $s + \frac{\delta}{2} \in A_1 \cap I$ pero sería mayor que el supremo de $A_1 \cap I$. Contradicción que proviene de suponer $s \in A_1$. Por lo tanto, $s \notin A_1$.
- Supongamos $s \in A_2$. Siendo A_2 abierto, existiría $\delta > 0$ tal que $B_\delta(s) \subset A_2$. Tal δ puede elegirse menor que $s - x$ (que sería estrictamente positivo pues $x \in A_1$, $s \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$); por propiedad de supremo, existiría $t \in A_1 \cap I$ tal que $s - \delta < t \leq s$; pero entonces $t \in B_\delta(s) \subset A_2$, es decir, t pertenecería a $A_1 \cap A_2$. Contradicción pues esos conjuntos se supusieron disjuntos. La contradicción proviene de suponer $s \in A_2$. Por lo tanto, $s \notin A_2$.

Así que $s \in I$ pero $s \notin A_1 \cup A_2$. Entonces $A_1 \cup A_2$ no puede contener a I . Esto permite concluir que I es conexo. \square

DEFINICIÓN 2.34. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, el **segmento desde z_1 hasta z_2** es el conjunto

$$[z_1, z_2] = \{(1 - t)z_1 + tz_2 : 0 \leq t \leq 1\}$$

Si $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, la **poligonal definida por $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$** es el conjunto

$$[z_1, z_2, \dots, z_n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [z_k, z_{k+1}]$$

y decimos que $[z_1, z_2, \dots, z_n]$ es una poligonal **desde z_1 hasta z_n** . Un **polígono** es una poligonal $[z_1, z_2, \dots, z_n]$ tal que $z_n = z_1$.

Es decir, una poligonal es la *concatenación* de dos o más segmentos por sus extremos, y un polígono es una poligonal *cerrada*, o sea, una poligonal cuyo punto final coincide con el inicial.

Como es fácil imaginar, cualquier segmento es un conjunto conexo (más adelante lo demostraremos formalmente, en base a la proposición 2.33), al igual que cualquier poligonal (un ejercicio que se propone más adelante, junto con la conexidad de los segmentos, permitirá arribar a esta conclusión).

Veremos seguidamente otras caracterizaciones de los conjuntos conexos. La primera expresa que un conjunto es conexo si no es la unión de dos subconjuntos *separados* no vacíos. Dos conjuntos C y D se dicen **separados** cuando $C \cap \overline{D} = \emptyset = \overline{C} \cap D$.

LEMA 2.35. Sean A y C subconjuntos disjuntos, con A abierto. Entonces $A \cap \overline{C} = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Como $A \cap C = \emptyset$, es $C \subset A^c$, y, siendo A^c cerrado por ser A abierto, es $\overline{C} \subset A^c$ (teor. 2.12), de donde se concluye el resultado buscado. \square

TEOREMA 2.36. Un conjunto es *disconexo* si, y sólo si, es la unión de dos conjuntos no vacíos *separados*.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos A disconexo. Sean A_1 y A_2 abiertos disjuntos tales que $A \subset A_1 \cup A_2$ y $A \cap A_1 \neq \emptyset \neq A \cap A_2$. Hagamos $C = A \cap A_1$ y $D = A \cap A_2$. Notando que $A_1 \cap D = \emptyset$, es $C \cap \overline{D} \subset A_1 \cap \overline{D} = \emptyset$ (lema 2.35); y análogamente $\overline{C} \cap D = \emptyset$. Luego, C y D son separados. Además, siendo $A \subset A_1 \cup A_2$, es $A = A \cap (A_1 \cup A_2) = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) = C \cup D$.

Para la vuelta, supongamos $A = C \cup D$ con C y D separados y no vacíos. Como $C \cap \overline{D} = \emptyset$, es $C \subset \overline{D}^c$, siendo este último un abierto. Por lo tanto, para cada $z \in C$, existe $R_z > 0$ tal que $B_{2R_z}(z) \subset \overline{D}^c$. Similarmente, para cada $w \in D$, existe $r_w > 0$ tal que $B_{2r_w}(w) \subset \overline{C}^c$. Para $z \in C$ y $w \in D$ cualesquiera, es $B_{R_z}(z) \cap B_{r_w}(w) = \emptyset$. En efecto, supongamos $R_z \geq r_w$ (el otro caso es análogo). Si hubiera $z_1 \in B_{R_z}(z) \cap B_{r_w}(w)$, sería

$$|z - w| \leq |z - z_1| + |z_1 - w| < R_z + r_w \leq 2R_z$$

implicando que $w \in B_{2R_z}(z) \subset \overline{D}^c$, es decir, $w \notin D$, lo que sería una contradicción. Así que los dos entornos son disjuntos.

Entonces, definamos $A_1 = \bigcup_{z \in C} B_{R_z}(z)$ y $A_2 = \bigcup_{w \in D} B_{r_w}(w)$. Por lo dicho previamente, será $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Además, se tiene que

1. A_1 y A_2 son abiertos (teor. 2.11).
2. $A \subset A_1 \cup A_2$, pues $A_1 \supset C$ y $A_2 \supset D$, teniéndose que $A_1 \cup A_2 \supset C \cup D = A$.
3. $A \cap A_1 \neq \emptyset$, pues como C es no vacío, existe $z \in C \subset A$, de donde $z \in A_1$ y $z \in A$.
Análogamente, $A \cap A_2 \neq \emptyset$.

En consecuencia, A es desconexo. \square

A primera vista, puede parecer que si un conjunto es conexo, es posible unir cualquier pareja de sus puntos por medio de un trazo continuo finito sin salirse del conjunto. Sin embargo, de acuerdo a nuestra definición, eso no es correcto; por ejemplo, el conjunto

$$\left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{C} : 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{0\}$$

satisface la definición de conexidad, pero es imposible unir los complejos 0 y $(1, \sin 1)$ con uno de tales trazos sin salirse del conjunto. Sin embargo, la situación cambia si el conjunto es abierto.

TEOREMA 2.37. *Sea A un subconjunto abierto no vacío de \mathbb{C} . A es conexo si, y sólo si, dos puntos cualesquiera de A pueden ser unidos por medio de una línea poligonal contenida en A .*

DEMOSTRACIÓN. Para la ida, supongamos que A es abierto y conexo. Sea z cualquier punto de A . Denotemos por A_1 al conjunto de puntos de A que pueden unirse con z a través de una poligonal contenida en A , y hagamos $A_2 = A - A_1$. Mostremos primero que A_1 es abierto. Si $z_1 \in A_1$, por ser A abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(z_1) \subset A$; todo punto de $B_r(z_1)$ puede conectarse con z_1 a través de un segmento (que estará contenido en A), y el propio z_1 con z a través de una poligonal contenida en A (pues $z_1 \in A_1$). Luego, $B_r(z_1) \subset A_1$, mostrando que A_1 es abierto. Ahora mostremos que A_2 es también abierto. Sea $z_2 \in A_2$. Por ser $z_2 \in A$, existe $r' > 0$ tal que $B_{r'}(z_2) \subset A$. Si algún punto de este entorno pudiera conectarse a través de una poligonal con z , se podría conectar a z_2 con z a través de una poligonal, lo que no es posible pues $z_2 \in A_2$. Entonces $B_{r'}(z_2) \subset A_2$, con lo que probamos que A_2 es abierto. Además, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Si A_2 no fuese vacío, tendríamos que A no es conexo, contradiciendo la hipótesis. Luego, $A_2 = \emptyset$, y resulta que z puede conectarse mediante una poligonal con cualquier punto de A . Como z se escogió arbitrariamente, tenemos demostrada la ida.

Para probar la vuelta por contradicción, supongamos que A es un abierto no conexo tal que dos cualesquiera de sus puntos pueden ser unidos mediante una poligonal contenida en A . Existen abiertos disjuntos (no vacíos) A_1 y A_2 tales que $A \subset A_1 \cup A_2$ y $A \cap A_1 \neq \emptyset \neq A \cap A_2$. Elijamos z_1 en A_1 y z_2 en A_2 cualesquiera. Sea P una poligonal desde z_1 hasta z_2 contenida en A . Notar que $P \cap A_1 \neq \emptyset$ porque z_1 está en P y en A_1 , y análogamente $P \cap A_2 \neq \emptyset$. Además, $P \subset A \subset A_1 \cup A_2$. Luego, la poligonal P no es conexa. Contradicción. \square

De hecho, la poligonal aludida en el resultado anterior puede elegirse con los segmentos paralelos a los ejes (la demostración de este hecho es exactamente la misma).

COROLARIO 2.38. *Los entornos (reducidos o no) son conjuntos conexos.*

4. El plano extendido y la esfera de Riemann

4.1. Plano complejo extendido. Para muchos propósitos es útil ampliar el sistema \mathbb{C} de los complejos mediante la introducción del símbolo ∞ que represente infinito, llamado en este caso *número complejo infinito*. El número complejo infinito no tiene signo ni argumento, pero puede entenderse como un número cuyo módulo es mayor que cualquier número real dado. Los puntos del plano junto con el punto del infinito constituyen el *plano complejo extendido* (o *ampliado*), \mathbb{C}_∞ (algunos autores también usan $\widehat{\mathbb{C}}$).

En el plano complejo extendido suponemos que el punto del infinito satisface las siguientes reglas con los números **finitos**:

$$z \pm \infty = \infty \quad z \cdot \infty = \infty \ (z \neq 0) \quad \frac{z}{\infty} = 0 \quad \frac{z}{0} = \infty \ (z \neq 0) \quad \frac{\infty}{z} = \infty$$

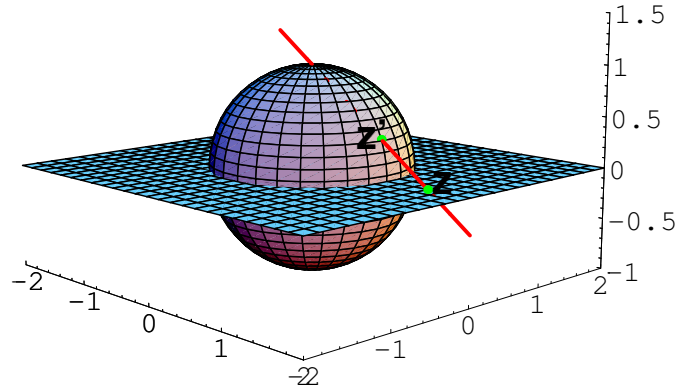
Las siguientes expresiones no están definidas:

$$\infty \pm \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{\infty}{\infty}$$

No es posible representar al número complejo infinito por un punto del plano complejo. Sin embargo, es posible tener una representación concreta de \mathbb{C}_∞ , mediante un ingenioso artificio: la *proyección estereográfica*.

4.2. Proyección estereográfica. Consideremos el plano complejo provisto de un tercer eje ortogonal ξ que pase por $(0,0)$ y una esfera unitaria centrada en dicho punto. En otras palabras, estamos considerando una representación de \mathbb{R}^3 a través de tres ejes ortogonales x, y, ξ en la que los ejes x e y juegan simultáneamente el rol de los ejes real e imaginario de \mathbb{C} (de modo que cada complejo (a, b) se identifica con el punto del espacio $(a, b, 0)$), y la esfera (con ecuación en el espacio $x^2 + y^2 + \xi^2 = 1$) es un subconjunto destacado de \mathbb{R}^3 . Hagamos $N = (0, 0, 1)$ (el *polo norte* de la esfera) y $S = (0, 0, -1)$ (el *polo sur* de la esfera). Esta esfera se conoce como *esfera de Riemann*, denotada por \mathcal{R} , y permite representar cada punto del plano complejo por un punto en la esfera, como se explica a continuación.

Dado $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, tracemos la recta que pasa por N y por el punto $(a, b, 0)$. Dicha recta corta a la esfera en dos puntos, uno es N y el otro es $Z = (x_0, y_0, \xi_0)$. Decimos que Z es la **proyección de z sobre la esfera**.



No es difícil ver intuitivamente (y probar analíticamente) que este mecanismo establece una correspondencia biyectiva entre \mathbb{C} y $\mathcal{R} - \{N\}$. Haciendo corresponder al polo norte el punto del infinito, obtenemos una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano extendido, \mathbb{C}_∞ , y los de la esfera de Riemann, \mathcal{R} ; esta correspondencia se llama **proyección estereográfica**.

Vamos a deducir las expresiones para las coordenadas (x_0, y_0, ξ_0) de Z en función de las coordenadas (a, b) de z . Nuestros datos son que $Z \in \mathcal{R}$ (por lo que $x_0^2 + y_0^2 + \xi_0^2 = 1$) y que Z pertenece a la recta del espacio que pasa por $(0, 0, 1)$ y por $(a, b, 0)$. Una ecuación paramétrica en \mathbb{R}^3 para esta recta es $(x, y, \xi) = (0, 0, 1) + t(a, b, -1)$ con $t \in \mathbb{R}$. Para encontrar las intersecciones de la recta con la esfera, debemos encontrar los valores de x, y, ξ, t tales que, simultáneamente, tengamos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \xi^2 &= 1 \\ x &= ta \\ y &= tb \\ \xi &= 1 - t \end{aligned}$$

Reemplazando las tres últimas ecuaciones en la primera, quedamos con

$$t^2 a^2 + t^2 b^2 + 1 - 2t + t^2 = 1$$

que equivale a $t((a^2 + b^2 + 1)t - 2) = 0$. De aquí que $t = 0$ o $t = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}$. El valor $t = 0$ corresponde a la intersección de la recta con la esfera en N , por lo que el que nos interesa es el otro valor: $t = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}$. Reemplazando en las otras ecuaciones, y recordando que $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ y que $a^2 + b^2 = |z|^2$, tenemos las coordenadas de Z en función del complejo z :

$$x_0 = \frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1} \quad y_0 = \frac{2 \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1} \quad \xi_0 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Ahora el problema inverso: dado un punto de la esfera distinto de N , ¿a qué número complejo corresponde? Para resolverlo, usemos las relaciones que obtuvimos recién, teniendo que

$$|z|^2 = \frac{1 + \xi_0}{1 - \xi_0}$$

Reemplazando en las fórmulas para x_0 e y_0 , y despejando $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$, deducimos que

$$\operatorname{Re} z = \frac{x_0}{1 - \xi_0} \quad \operatorname{Im} z = \frac{y_0}{1 - \xi_0}$$

Hacemos notar que el exterior del círculo unitario centrado en el origen del plano \mathbb{C}_∞ corresponde al *hemisferio norte*, sin el *ecuador*; los puntos de la frontera de dicho círculo son *fijos* para la proyección estereográfica, y los puntos interiores corresponden al *hemisferio sur*. En particular, 0 corresponde al *polo sur*.

Además, para cada r positivo, los puntos del plano complejo exteriores al círculo $|z| = r$ corresponden a puntos de la esfera *próximos* al punto N . Por esta razón, llamaremos al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ un *entorno de radio $1/r$ del punto del infinito*. Es decir:

$$B_{\frac{1}{r}}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$$

EJERCICIOS

- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos, y cuáles cerrados, en la topología usual de \mathbb{C} ?

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ b) \mathbb{R} c) $\{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z < 1\}$

d) $\{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 1\}$ e) $\{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{Z} : n \geq 1, z^n = 1\}$

- Mostrar que en \mathbb{C} con la distancia euclídea, la clausura de un entorno $B_r(z_0)$ es el conjunto de todos los complejos z tales que $|z - z_0| \leq r$.

- Sea $E \subset \mathbb{C}$.

a) Mostrar que si $A \subset E$ y A es abierto, entonces $A \subset E^\circ$.

b) Demostrar que $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$.

c) Mostrar que $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c} = \overline{E} - E^\circ$.

d) Probar que $(\partial E)^c = E^\circ \cup (E^c)^\circ$, que $\overline{E} = E \cup \partial E$ y que $E^\circ = E - \partial E$.

- Encontrar la clausura en \mathbb{C} de los conjuntos

$$\left\{x + i \operatorname{sen} \frac{1}{x} : 0 < x \leq 1\right\} \quad \text{y} \quad \left\{x + ix \operatorname{sen} \frac{1}{x} : 0 < x \leq 1\right\}$$

- Para cada $k \in \mathbb{N}$, considérese definido un conjunto A_k de \mathbb{C} . Probar que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\bigcup_{k=0}^n A_k} = \bigcup_{k=0}^n \overline{A_k} \quad \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k} \supset \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{A_k}$$

Mostrar, mediante un ejemplo, que la última inclusión puede ser estricta.

- a) Dé un ejemplo de una familia decreciente de conjuntos acotados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.

- b) Dé un ejemplo de una familia decreciente de conjuntos cerrados (no vacíos) cuya intersección sea vacía.
7. a) Muestre que toda unión finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
b) Dé un ejemplo de una familia de conjuntos compactos cuya unión no sea compacta.
c) Muestre que cualquier intersección arbitraria de compactos es un conjunto compacto.
8. Demostrar que el diámetro de cualquier triángulo no puede ser superior a su perímetro.
9. a) Sea $K = \{0\} \cup \{(n+1)^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Mostrar que K es un subconjunto compacto de \mathbb{C} , utilizando la definición de compacidad.
b) Mostrar que el conjunto $\{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x < 1, y = 0\}$ no es compacto, dando un ejemplo de cubrimiento por abiertos que no posea subcubrimiento finito.
10. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{C} son conexos:

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 1\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\right\}$$

11. Sea $\{C_k\}_{k \in \Lambda}$ una familia de conjuntos conexos tal que $\bigcap_{k \in \Lambda} C_k \neq \emptyset$. Mostrar que $\bigcup_{k \in \Lambda} C_k$ es un conjunto conexo. Mostrar que cualquier poligonal es conexa, asumiendo que los segmentos son conexos.
12. Una **componente conexa maximal** (o, simplemente, componente) de un conjunto A es un subconjunto conexo de A que no está contenido propiamente en un subconjunto conexo de A .
a) Encontrar las componentes de cada uno de los conjuntos del ejercicio 10.
b) Mostrar que cualquier conjunto es la unión de sus componentes, y que dos componentes distintas son disjuntas.
13. Graficar las siguientes regiones del plano complejo:
- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| i) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -2\}$ | ii) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 3 \operatorname{Im} z\}$ |
| iii) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z\}$ | iv) $\left\{z \in \mathbb{C} : z - 3 + i = \frac{1}{2}\right\}$ |
| v) $\{z \in \mathbb{C} : 3 < z + 3 - 4i \leq 5\}$ | vi) $\left\{z \in \mathbb{C} : \left \frac{z+1}{z-1}\right = 4\right\}$ |
| vii) $\{z = re^{i\theta} : r = 2, \theta \in \mathbb{R}\}$ | viii) $\left\{z = re^{i\theta} : r = 2 \wedge \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi\right\}$ |
| ix) $\left\{z = re^{i\theta} : \theta = \frac{5}{4}\pi, r \in \mathbb{R}_0^+\right\}$ | x) $\left\{z = re^{i\theta} : \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi, r \in \mathbb{R}\right\}$ |
14. Sea \mathcal{R} la esfera de Riemann. Hallar los puntos de \mathcal{R} correspondientes a los números complejos $z_0 = 0$, $z_1 = 0,5 + 0,5i$ y $z_2 = 3 + 2i$.
15. Hallar los subconjuntos de \mathcal{R} correspondientes a los ejes real e imaginario en \mathbb{C}_∞ .
16. Dado el real β tal que $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, ¿cuál es, en el plano complejo, la imagen del paralelo de \mathcal{R} que tiene latitud β ?
17. Dados los reales α y r tales que $0 \leq \alpha < 2\pi$ y $r \geq 0$, hallar en \mathcal{R} la imagen del rayo $\arg z = \alpha$, y de la circunferencia $|z| = r$.
18. Sean Z y Z' puntos de \mathcal{R} correspondientes a los complejos z y z' respectivamente, y sea W el punto de \mathcal{R} que corresponde a $z + z'$. Hallar las coordenadas de W en términos de las coordenadas de Z y Z' .
19. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que dos complejos z y z' sean las proyecciones estereográficas de dos puntos diametralmente opuestos de la esfera es que $z\bar{z}' = -1$.

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Nos proponemos ahora el objetivo de estudiar las funciones complejas definidas en subconjuntos del plano complejo provisto de la distancia euclídea. Veremos cómo muchas de las ideas conocidas para funciones de variable real pueden ser extendidas a \mathbb{C} . Por ejemplo, queremos aquí llegar a definir límite y derivada de funciones complejas, y visualizar métodos de cálculo. Presentaremos también un concepto más fuerte que el de la derivabilidad: el de la analiticidad, que es clave en la teoría de variables complejas.

1. Preliminares

Suponemos conocido el concepto de función entre dos conjuntos cualesquiera. Sin embargo, precisaremos ahora alguna notación y ciertas propiedades de las funciones que nos resultarán de utilidad en lo sucesivo.

Si f es una función de X en Y , $A \subset X$ y $B \subset Y$, denotamos por $f(A)$ al conjunto de todos los elementos de Y que son imagen por f de algún elemento de A , y por $f^{-1}(B)$ al conjunto de todos los elementos de X cuya imagen por f pertenece a B . Formalmente:

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\} \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Sea f una función de X en Y , A y E subconjuntos de X , B y F subconjuntos de Y , $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos de X , $\{B_k\}_{k \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos de Y . Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $A \subset E \Rightarrow f(A) \subset f(E)$
2. $B \subset F \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(F)$
3. Si f es inyectiva, $f(X - A) \subset Y - f(A)$. Si f es sobreyectiva, $f(X - A) \supset Y - f(A)$.
Luego, para f biyectiva, es $f(X - A) = Y - f(A)$.
4. $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$
5. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (si f es sobreyectiva, vale la igualdad).
6. $A \subset f^{-1}(f(A))$ (si f es inyectiva, vale la igualdad).
7. $f(\bigcup_{k \in \Lambda} A_k) = \bigcup_{k \in \Lambda} f(A_k)$
8. $f(\bigcap_{k \in \Lambda} A_k) \subset \bigcap_{k \in \Lambda} f(A_k)$ (si f es inyectiva, vale la igualdad).
9. $f^{-1}(\bigcup_{k \in \Lambda} B_k) = \bigcup_{k \in \Lambda} f^{-1}(B_k)$
10. $f^{-1}(\bigcap_{k \in \Lambda} B_k) = \bigcap_{k \in \Lambda} f^{-1}(B_k)$

Si $f : X \rightarrow Y$ y $S \subset X$, se define la **restricción de f a S** como la función $g : S \rightarrow Y$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in S$. Una notación habitual para la función restringida es $f|_S$, aunque haciendo abuso de notación, también suele usarse el mismo nombre f .

2. Función compleja de variable compleja

Una función compleja de variable compleja es una función f que va de un subconjunto D (no vacío) de los números complejos a los números complejos. Es común llamar z a la variable independiente y $w = f(z)$ a la dependiente. Simbólicamente:

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto w = f(z) \end{aligned}$$

El conjunto D se llama **dominio de definición de f** . Adoptaremos la convención de que si D no está explícitamente especificado, se sobreentiende que es el más grande subconjunto de \mathbb{C} para el cual la expresión que corresponde a $f(z)$ está definida.

Es usual considerar expresados a z y w en su forma binómica, digamos $z = x + iy$ y $w = u + iv$ (con $x, y, u, v \in \mathbb{R}$). En general, las partes real e imaginaria de w dependerán tanto de x como de y , y para obtenerlas habrá que reemplazar a z por $x + iy$ en la expresión que define a $f(z)$ en términos de z , y operar hasta que quede claro cuáles son u y v reales en términos de x e y .

EJEMPLO 3.1. Si $f(z) = \bar{z}^{-1}$, para obtener u y v en general, hacemos

$$w = f(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - iy} \frac{x + iy}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

de donde surge que

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R} \qquad v(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

ambas definidas para todo vector no nulo de \mathbb{R}^2 . □

Dada una función compleja f , siempre podemos obtener la *función parte real* $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y la *función parte imaginaria* $v : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Recíprocamente, cualquier par de funciones reales de dos variables $u(x, y)$ y $v(x, y)$ con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ define una función $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ en el mismo dominio D (visto como subconjunto de \mathbb{C}).

Para cualquier función compleja f , el conocimiento de las funciones de parte real e imaginaria u y v será importante en el estudio de las propiedades de f (a título de ejemplo, nótese que f está definida en $x_0 + iy_0$ si, y sólo si, u y v están definidas en (x_0, y_0)). Por eso es esencial saber encontrarlas. A continuación presentamos algunos ejemplos más.

EJEMPLO 3.2. Dadas las siguientes funciones, hallar el dominio y determinar sus partes real e imaginaria, en función de las partes real e imaginaria de la variable independiente.

1. $f(z) = z^2 + 1$. Esta expresión está bien definida para cualquier $z \in \mathbb{C}$, por lo que, en este caso, el dominio de definición de la función es $D = \mathbb{C}$. Por la sustitución $z = x + iy$, tenemos que

$$f(z) = (x + iy)^2 + 1 = x^2 - y^2 + 2xyi + 1 = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy)$$

Por lo tanto, $u(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ y $v(x, y) = 2xy$.

2. $f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$. El único valor de z en que esta expresión no puede ser evaluada es en $2i$. Por lo tanto, $D = \mathbb{C} - \{2i\}$, y

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x + iy + 1}{x + iy - 2i} = \frac{(x + 1) + iy}{x + i(y - 2)} = \frac{(x + 1) + iy}{x + i(y - 2)} \frac{x - i(y - 2)}{x - i(y - 2)} \\ &= \frac{(x + 1)x + y(y - 2) + i(-(x + 1)(y - 2) + yx)}{x^2 + (y - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 + x + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2} + i \frac{2x - y + 2}{x^2 + (y - 2)^2} \end{aligned}$$

Es decir, $u(x, y) = \frac{x^2 + x + y^2 - 2y}{x^2 + (y - 2)^2}$ y $v(x, y) = \frac{2x - y + 2}{x^2 + (y - 2)^2}$.

3. $f(z) = \operatorname{Re} z + |z|^2$. El dominio es \mathbb{C} . Notemos que si $z = x + iy$, es $\operatorname{Re} z = x$. Por lo tanto, $f(z) = x + x^2 + y^2$, y, en consecuencia, tenemos que $u(x, y) = x^2 + y^2 + x$, $v(x, y) = 0$.
4. $f(z) = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$. Aquí tenemos que $D = \mathbb{C} - \{0\}$, pues el logaritmo principal de un número complejo está bien definido para cualquier complejo no nulo. Dado que $\ln |z|$ y $\operatorname{Arg} z$ son números reales, tenemos que $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ y $v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$. □

A veces, será conveniente considerar a z en su forma exponencial ($z = re^{i\theta}$) y obtener entonces u y v en función de r y θ .

EJEMPLO 3.3. Obtener las partes real e imaginaria u y v de las siguientes funciones, en términos de las coordenadas polares r y θ de la variable independiente.

1. Para $f(z) = z + 1/\bar{z}$, haciendo $z = re^{i\theta}$, tenemos que

$$f(re^{i\theta}) = re^{i\theta} + \frac{1}{re^{-i\theta}} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{i\theta} = \frac{r^2 + 1}{r}(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{r^2 + 1}{r} \cos \theta + i \frac{r^2 + 1}{r} \sin \theta$$

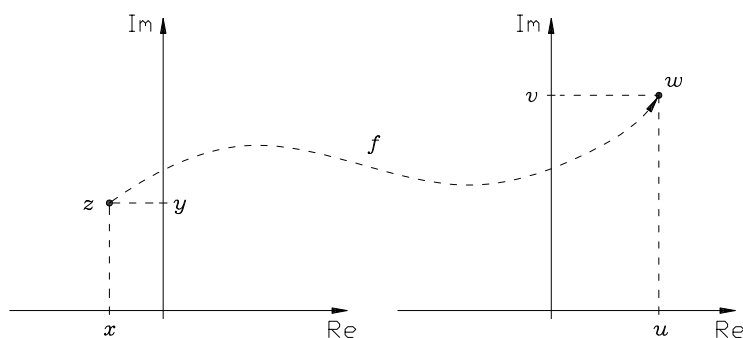
Luego, $u(r, \theta) = \frac{r^2 + 1}{r} \cos \theta$ y $v(r, \theta) = \frac{r^2 + 1}{r} \sin \theta$, con dominio $D = \mathbb{C} - \{0\}$.

2. Para $f(z) = \text{Ln } z$, con dominio $\mathbb{C} - \{0\}$, tenemos que $f(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, por lo que $u(r, \theta) = \ln r$ y $v(r, \theta) = \theta$. \square

2.1. Representación gráfica. Si $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función compleja de variable compleja, se define su **gráfico** como el conjunto

$$G = \{(z, w) : z \in D \wedge w = f(z)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

Como vemos, está contenido en un espacio vectorial de dimensión cuatro sobre los reales. Su representación gráfica en ejes independientes es entonces imposible, por lo que recurrimos al siguiente artificio: vamos a representar a los valores de la variable independiente z y de la variable dependiente w en dos planos complejos distintos que llamaremos *plano z* (con ejes x e y) y *plano w* (con ejes u y v), respectivamente. Entonces, la relación funcional $w = f(z)$ establece una correspondencia entre los puntos (x, y) del plano z y los puntos (u, v) del plano w .

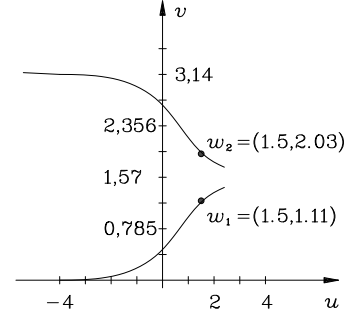
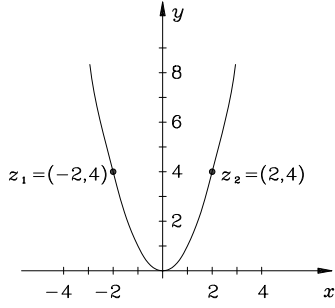


Planos z y w para $z \mapsto w = f(z)$

EJEMPLO 3.4. Consideremos la función $f(z) = \text{Ln } z$, y veamos cómo transforma los puntos que están sobre la parábola $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = (\text{Re } z)^2, z \neq 0\}$.

Del ejemplo 3.2, sabemos que $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Si z está sobre la parábola, se satisface que $y = x^2$, y, en ese caso, $u(x) = \ln(|x|\sqrt{1 + x^2})$. Análogamente, si z es un complejo del primer cuadrante (es decir, si $x > 0$), tenemos que $v(x) = \arctan x$, mientras que si z está en el segundo ($x < 0$), es $v(x) = \pi + \arctan x$ (tomando $-\frac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}$). La siguiente figura

muestra los planos z y w en cuestión.



$$D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2, \operatorname{Re} z \neq 0\}$$

$$f(D) = \{w \in \mathbb{C} : w = \operatorname{Ln} z, z \in D\}$$

□

3. Límites

Al igual que en el caso de funciones reales de variable real, la prolífica e importante noción de límite permite el desarrollo posterior de dos conceptos fundamentales: la derivación y la integración.

DEFINICIÓN 3.5. Sea f una función de $D \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} , z_0 un punto de acumulación de D y $L \in \mathbb{C}$. Decimos que el **límite de f cuando z tiende a z_0** es L si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$. En ese caso, escribimos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$.

Notar que no es necesario que $z_0 \in D$ para poder hablar de límite cuando z tiende a z_0 . Además, aún estando definida la función en z_0 , podría ocurrir que $f(z_0) \neq L$.

Podríamos haber dado una definición equivalente de límites en términos de entornos, según veremos ahora.

PROPOSICIÓN 3.6. Sean f una función de $D \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} , z_0 punto de acumulación de D , y $L \in \mathbb{C}$. Se tiene que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(D \cap B_\delta^*(z_0)) \subset B_\varepsilon(L)$.

DEMOSTRACIÓN. Es directo ver que

$$z \in D \wedge 0 < |z - z_0| < \delta \iff z \in D \cap B_\delta^*(z_0)$$

y que

$$|f(z) - L| < \varepsilon \iff f(z) \in B_\varepsilon(L)$$

Por lo tanto, la definición de límite equivale a que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in D \cap B_\delta^*(z_0), f(z) \in B_\varepsilon(L)$$

lo que es equivalente a que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(D \cap B_\delta^*(z_0)) \subset B_\varepsilon(L)$. □

EJEMPLO 3.7. Usando la definición, verificaremos que $\lim_{z \rightarrow 1+2i} ((1-3i)z + 2i) = 7 + i$.

Dado que el dominio de definición de la función cuyo límite estamos calculando es todo \mathbb{C} , tenemos que probar que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |z - 1 - 2i| < \delta \Rightarrow |(1-3i)z + 2i - 7 - i| < \varepsilon$.

Observemos que $|(1-3i)z + 2i - 7 - i| = |(1-3i)z - 7 + i| = |1-3i| \left| z - \frac{7-i}{1-3i} \right| = \sqrt{10} |z - 1 - 2i|$. Por lo tanto, basta con tomar cualquier $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{10}}$ para ver que se satisface la definición de límite. □

La demostración en el ejemplo anterior es fácilmente generalizable para demostrar que $\lim_{z \rightarrow z_0} (\alpha z + \beta) = \alpha z_0 + \beta$, cualesquiera sean los complejos α , β y z_0 .

EJEMPLO 3.8. Si z_0 , k y k' son números complejos fijos, la función $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \begin{cases} k' & \text{si } z = z_0 \\ k & \text{si } z \neq z_0 \end{cases}$$

tiene límite k cuando $z \rightarrow z_0$, pues dado $\varepsilon > 0$, basta con tomar $\delta = 1$ para ver que se satisface la definición. Nótese que la condición $0 < |z - z_0|$ hace que no interese cuánto vale la función en z_0 (k' en este caso), importando sólo los valores en entornos reducidos de z_0 . \square

EJEMPLO 3.9. Sea $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida mediante:

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \text{ tiene ambas componentes racionales} \\ z & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Mostraremos que $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon$, y consideremos cualquier $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z| < \delta$. Si z tiene ambas coordenadas racionales, es $|h(z)| = |0| = 0 < \varepsilon$, y si z tiene alguna de sus coordenadas irracional, es $|h(z)| = |z| < \delta = \varepsilon$. Como vemos, siempre que $0 < |z| < \delta$, es $|h(z)| < \varepsilon$, lo que demuestra que $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = 0$. \square

EJEMPLO 3.10. La función $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$s(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \text{ tiene ambas componentes racionales} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

no tiene límite cuando $z \rightarrow 0$. Porque supongamos que existiese $L \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{z \rightarrow 0} s(z) = L$. Notemos que en todo entorno reducido de 0 existe z con ambas coordenadas racionales. Entonces L no puede ser 0, pues la definición de límite fallaría tomando $\varepsilon = 1$. Entonces es $L \neq 0$, con lo que $|L| > 0$. Para $\varepsilon = |L|/2$ (positivo), sea $\delta > 0$ tal que $|s(z) - L| < \varepsilon$ toda vez que $0 < |z| < \delta$. Tomemos $z \in B_\delta^*(0)$ tal que z tiene alguna de sus coordenadas irracional. Luego, $s(z) = 0$, por lo que $|s(z) - L| = |L| > \varepsilon$, contradiciendo la definición de límite. La contradicción proviene de suponer que s tiene límite cuando z tiende a 0. \square

Desarrollaremos ahora propiedades generales de los límites. Comenzaremos por mostrar que el límite de una función, cuando existe, es único.

PROPOSICIÓN 3.11. *Si una función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene límite cuando z tiende a z_0 , el límite es único.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_1$, y sea $L_2 \neq L_1$. Hagamos $\varepsilon = |L_2 - L_1|/2$, resultando $\varepsilon > 0$ al que le corresponde $\delta > 0$ tal que si $z \in D$ y $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - L_1| < \varepsilon$, y por lo tanto, para cualquiera de tales z , es

$$|f(z) - L_2| = |f(z) - L_1 - (L_2 - L_1)| \geq |L_2 - L_1| - |f(z) - L_1| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

Ya que cualquier entorno reducido alrededor de z_0 contiene puntos $z \in D$ a distancia menor que δ , y para ellos $|f(z) - L_2| > \varepsilon$, se sigue que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq L_2$. \square

Hagamos notar un hecho muy importante. En el dominio de definición de la función, puede haber muchas trayectorias por las que podemos acercarnos a z_0 . Si por dos trayectorias distintas, los límites de $f(z)$ no son iguales, entonces no existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Formalizamos ésto de la siguiente manera.

PROPOSICIÓN 3.12. *Si $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene límite L cuando z tiende a z_0 , y S es un subconjunto de D que tiene a z_0 como punto de acumulación, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f|_S(z) = L$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(D \cap B_\delta^*(z_0)) \subset B_\varepsilon(L)$. Ya que $D \cap B_\delta^*(z_0) \supset S \cap B_\delta^*(z_0)$, tenemos que $f(S \cap B_\delta^*(z_0)) \subset B_\varepsilon(L)$. Como $S \cap B_\delta^*(z_0) \subset S$, es $f(S \cap B_\delta^*(z_0)) = f|_S(S \cap B_\delta^*(z_0))$, por lo que $f|_S(S \cap B_\delta^*(z_0)) \subset B_\varepsilon(L)$. Luego, por proposición 3.6, se concluye el resultado. \square

EJEMPLO 3.13. Para $f(z) = \bar{z}/z$, analicemos la existencia del límite cuando z tiende a 0. Si nos aproximamos a 0 por el semieje real positivo, tenemos que $z = \bar{z}$, por lo que el cociente \bar{z}/z vale constantemente 1; en consecuencia, el límite de la función por esta trayectoria es 1. Pero si nos acercamos a 0 por el semieje imaginario positivo, para esos puntos es $\bar{z} = -z$ (pues si $z = iy$ para $y \in \mathbb{R}^+$, es $\bar{z} = \overline{0 + iy} = -iy = -z$) y entonces el límite por esta trayectoria es -1 . Luego, no existe límite de la función cuando z tiende a 0. \square

Ahora encontraremos una caracterización de límites de funciones de variable compleja a partir de límites de funciones de variables reales, lo que nos permitirá obtener rápidamente propiedades algebraicas de los procesos de límite en el caso complejo (basados en el conocimiento de propiedades análogas para funciones reales).

PROPOSICIÓN 3.14. Sea $f(z)$ una función compleja definida en $D \subset \mathbb{C}$, con partes real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$ respectivamente. Sean $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$, y hagamos $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b$$

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib$, existe $\delta > 0$ tal que $|u(x, y) + iv(x, y) - (a + ib)| < \varepsilon$ toda vez que $x + iy \in D$ y $0 < |x + iy - (x_0 + iy_0)| < \delta$. Es decir,

$$(x, y) \in D \wedge 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |(u(x, y) - a) + i(v(x, y) - b)| < \varepsilon$$

Como el módulo de un complejo es siempre mayor o igual que el módulo de sus partes real e imaginaria, tenemos entonces que si $(x, y) \in D$ y $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, se satisface que $|u(x, y) - a| < \varepsilon$ y que $|v(x, y) - b| < \varepsilon$. Esto quiere decir que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b$.

\Leftarrow Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que si $(x, y) \in D$ y $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta_1$, entonces $|u(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. También existe $\delta_2 > 0$ tal que si $(x, y) \in D$ y $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta_2$, entonces $|v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tendremos que para cualquier $z = (x, y) \in D$ con $0 < |z - z_0| < \delta$ ocurrirá que $|u(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f(z) - (a + ib)| &= |u(x, y) + iv(x, y) - a - ib| = |(u(x, y) - a) + i(v(x, y) - b)| \\ &\leq |u(x, y) - a| + |v(x, y) - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

por lo que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib$. \square

En resumidas cuentas, el límite de una función de variable compleja existe si, y sólo si, existen los límites (dobles) de sus partes real e imaginaria en el punto (x_0, y_0) , y, en ese caso, las partes real e imaginaria del límite son, respectivamente, los límites de la parte real y de la parte imaginaria.

Veremos ahora aspectos algebraicos de los límites de funciones de variable compleja, teniendo en mente propiedades del límite de funciones reales de dos variables reales: límites de suma o producto de funciones se obtienen, respectivamente, por suma o producto de los límites individuales, **siempre y cuando los mismos existan**. Para el cociente, hay que pedir además que el límite de la función en el denominador no sea 0.

PROPOSICIÓN 3.15. Sean f y g funciones complejas definidas en $D \subset \mathbb{C}$, y sea z_0 punto de acumulación de D . Supongamos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ existen ambos. Entonces:

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$

3. Si además es $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ y $g(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$. Como existen $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$, por prop. 3.14, tenemos que los límites de $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ y $v_2(x, y)$ existen todos, cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) . Entonces existen también los límites de $u_1(x, y) + u_2(x, y)$ (que es la parte real de $f + g$) y de $v_1(x, y) + v_2(x, y)$ (la parte imaginaria de $f + g$) cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) . Entonces, nuevamente por prop. 3.14, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (u_1(x, y) + u_2(x, y)) + i \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (v_1(x, y) + v_2(x, y)) \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u_1(x, y) + \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u_2(x, y) + \\ &\quad i \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v_1(x, y) + i \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v_2(x, y) \\ &= \left(\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u_1(x, y) + i \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v_1(x, y) \right) + \\ &\quad \left(\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u_2(x, y) + i \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v_2(x, y) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \end{aligned}$$

Las demostraciones para el producto y el cociente son análogas. \square

Por ejemplo, sabiendo que $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$, gracias a la proposición anterior, podemos ver inmediatamente que $\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n$ para cualquier entero n (excluido el caso $z_0 = 0$ si $n < 0$).

Otra propiedad de los límites, que será útil posteriormente, es que si una función tiene en z_0 límite 0 y se la multiplica por una función de módulo acotado, aún cuando esta última no tenga límite, el producto sigue teniendo límite 0 cuando z tiende a z_0 .

PROPOSICIÓN 3.16. Sean f y g funciones de $D \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} y z_0 punto de acumulación de D . Supongamos que exista un real positivo M tal que $\forall z \in D, |g(z)| < M$ y que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$. Entonces, $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que para todo $z \in D$ con $0 < |z - z_0| < \delta$, se satisfaga que $|f(z)| < \varepsilon/M$. Luego, para todo $z \in D$ con $0 < |z - z_0| < \delta$, se cumple que $|f(z)g(z)| < \varepsilon$. Entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = 0$. \square

La definición de límite establece que el módulo de la diferencia entre el valor de la función y su límite se hace arbitrariamente pequeña en entornos adecuados de z_0 . Esto quiere decir que la función puede escribirse como su límite más otra función de límite nulo. Formalicemos esto.

PROPOSICIÓN 3.17. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, z_0 punto de acumulación de D , y $L \in \mathbb{C}$. Se tiene que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si, y sólo si, existe una función $\lambda : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\forall z \in D, f(z) = L + \lambda(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda(z) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$. Para $z \in D$, hagamos $\lambda(z) = f(z) - L$. Obviamente, para cualquier $z \in D$, será $f(z) = L + \lambda(z)$, y ya que $\lim_{z \rightarrow z_0} L = L$, tenemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - \lim_{z \rightarrow z_0} L = 0$ (prop 3.15).

Ahora supongamos que $\forall z \in D, f(z) = L + \lambda(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda(z) = 0$. Ya que existen los límites de $\lambda(z)$ y de la función constante L cuando z tiende a z_0 , por prop. 3.15, tenemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (\lambda(z) + L) = \lim_{z \rightarrow z_0} \lambda(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} L = 0 + L = L$. \square

Supongamos que f es una función de $D_1 \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} y que g es una función de $D_2 \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} , con $f(D_1) \subset D_2$. La función compuesta $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ está bien definida. Supongamos que z_0 es punto de acumulación de D_1 y que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_1$. Supongamos también que L_1 es punto de acumulación de D_2 , y que $\lim_{z \rightarrow L_1} g(z) = L_2$. Resulta entonces natural preguntarse por la existencia del límite de la composición cuando z tiende a z_0 . Lo primero que la intuición nos hace pensar es que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z))$ existe y vale también L_2 . Sin embargo...

EJEMPLO 3.18. Sean f y g las funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} dadas por

$$f(z) = 0 \qquad g(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

Observamos que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0 = \lim_{z \rightarrow 0} g(z)$, pero $g \circ f$ es la función constante igual a 1, por lo que $\lim_{z \rightarrow 0} g(f(z)) = 1$. \square

Reconociendo la equivocación en nuestra intuición, podríamos pensar entonces que el límite de la composición *debe* existir cuando z tiende a z_0 , aún sin ser igual a L_2 . Sin embargo...

EJEMPLO 3.19. Sean f y g las funciones de \mathbb{C} en \mathbb{C} dadas por

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \text{ tiene componentes racionales} \\ z & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \qquad g(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

Debemos notar que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + iy) = 0 \iff x, y \in \mathbb{Q}$. Tenemos que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0 = \lim_{z \rightarrow 0} g(z)$, pero

$$g(f(x + iy)) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x + iy) = 0 \\ 0 & \text{si } f(x + iy) \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

de modo que no existe límite de la composición cuando z tiende a 0. \square

Veremos luego que, bajo ciertas condiciones sobre la función g , el límite de la composición efectivamente existe.

3.1. Límite infinito y límite en el infinito. La definición de límite que hemos considerado hasta ahora corresponde a valores finitos para la variable y para el límite, pero veremos, a continuación, variantes de la definición, que permiten que la variable tienda a infinito, o que el límite sea infinito.

- Límite infinito: dados $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y z_0 punto de acumulación de D , decimos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$.

Esto significa que para cada M podemos encontrar un entorno reducido de z_0 en el cual el módulo de la función es mayor que M .

EJEMPLO 3.20. De la definición surge que, para cualquier $a \in \mathbb{C}$, es $\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{z-a} = \infty$, pues dado $M \in \mathbb{R}$, basta con elegir $\delta = \frac{1}{|M|+1} > 0$, ya que si z satisface $0 < |z - a| < \delta$, tenemos que $0 < |z - a| < \frac{1}{|M|+1}$, de donde $|\frac{1}{z-a}| > |M| + 1 > M$. \square

- Límite en el infinito: dada una función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de modo tal que D contenga el exterior de algún círculo con centro en el origen, y dado $L \in \mathbb{C}$, decimos que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |z| > \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$.

Como vemos, f debe estar definida en algún entorno del infinito, y para cada $\varepsilon > 0$ debe haber un entorno del infinito en el cual los valores de la función difieren de L (en módulo) en una cantidad menor que ε .

EJEMPLO 3.21. Mostremos que, para cualquier $a \in \mathbb{C}$, es $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z-a} = 0$: dado $\varepsilon > 0$, basta con elegir $\delta = |a| + \frac{1}{\varepsilon} > 0$, ya que para cualquier z que cumple $|z| > \delta$, tenemos que $|z - a| \geq |z| - |a| > \frac{1}{\varepsilon}$, de donde $\left| \frac{1}{z-a} \right| < \varepsilon$. \square

- Límite infinito en el infinito: dada una función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de modo tal que D contenga el exterior de algún círculo con centro en el origen, decimos que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : |z| > \delta \Rightarrow |f(z)| > M$.

Esto quiere decir que para cada M podemos encontrar un entorno del infinito en el cual el módulo de la función es mayor que M .

EJEMPLO 3.22. Veamos que $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 = \infty$: dado $M \in \mathbb{R}$, es suficiente tomar $\delta = \sqrt{1 + |M|} > 0$, ya que para cualquier z que cumple $|z| > \delta$, tenemos que $|z^2| > 1 + |M| > M$. \square

4. Continuidad

DEFINICIÓN 3.23. Una función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es **continua en** $z_0 \in D$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in D, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Si f es continua en todo punto de un subconjunto E , decimos que f es **continua en** E .

Notar que, para que f sea continua en z_0 , f debe estar definida en z_0 .

Analizando con cuidado la definición, podemos notar que si z_0 es punto aislado en D , f es continua en z_0 . Si, por el contrario, z_0 es punto de acumulación de D , se tiene que f es continua en z_0 si, y sólo si, se satisfacen las siguientes tres condiciones simultáneamente:

1. Existe $f(z_0)$.
2. Existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

EJEMPLO 3.24. Estudiemos la continuidad de la función $f(z) = \text{Arg } z$ en $z_0 = -3$. Observamos que z_0 es punto de acumulación del dominio de f , de modo que veamos si existe el límite de f en z_0 , y si coincide con $f(z_0)$.

1. Existe $f(-3) = \text{Arg}(-3) = \pi$.
2. No existe $\lim_{z \rightarrow -3} \text{Arg } z$, ya que si z se aproxima a -3 por una circunferencia de radio 3 centrada en el origen, por el segundo cuadrante, el argumento de z tiende a π , y por el tercer cuadrante tiende a $-\pi$, en consecuencia no existe el límite. Luego, la función $f(z) = \text{Arg } z$ no es continua en $z_0 = -3$. Por analogía, deducimos que esta función no es continua sobre el semieje real de los números negativos, y tampoco es continua en $z_0 = 0$ por no estar definida en dicho punto. \square

Al igual que con los límites, podríamos haber dado una definición equivalente de continuidad en términos de entornos.

PROPOSICIÓN 3.25. Sea f una función de $D \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} y sea $z_0 \in D$. f es continua en z_0 si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(D \cap B_\delta(z_0)) \subset B_\varepsilon(f(z_0))$.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que

$$z \in D \wedge |z - z_0| < \delta \iff z \in D \cap B_\delta(z_0)$$

y que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \iff f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0))$$

Por lo tanto, la definición de continuidad equivale a que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in D \cap B_\delta(z_0), f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0))$$

lo cual es equivalente a que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(D \cap B_\delta(z_0)) \subset B_\varepsilon(f(z_0))$. \square

El siguiente resultado recuerda al *principio de conservación de signos* de las funciones reales continuas.

PROPOSICIÓN 3.26. *Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continua en z_0 , con $f(z_0) \neq 0$. Entonces, existe $r > 0$ tal que para todo $z \in D \cap B_r(z_0)$, $f(z) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon = |f(z_0)|/2 > 0$. Por continuidad, en correspondencia con este ε , existe $r > 0$ tal que si $|z - z_0| < r$, es $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Entonces, para $z \in D$ satisfaciendo $|z - z_0| < r$, se tiene que $||f(z_0)| - |f(z)|| \leq |f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$, es decir, $|f(z)| > |f(z_0)|/2 > 0$. Luego, para todo $z \in B_r(z_0)$ es $f(z) \neq 0$. \square

Analicemos ahora la continuidad de la restricción de una función continua.

PROPOSICIÓN 3.27. *Sea f una función de $D \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} .*

1. *Si f es continua en un complejo z_0 y S es un subconjunto de D que contiene a z_0 , entonces la función restringida $f|_S$ es también continua en z_0 .*
2. *Si $S \subset D$ y f es continua en S , entonces $f|_S$ es continua en S .*

DEMOSTRACIÓN. Para ver la primera parte, sea $\varepsilon > 0$; existe $\delta > 0$ tal que $f(D \cap B_\delta(z_0)) \subset B_\varepsilon(f(z_0))$ (prop. 3.25), y como $S \cap B_\delta(z_0) \subset D \cap B_\delta(z_0)$, se tiene que $f(S \cap B_\delta(z_0)) \subset B_\varepsilon(f(z_0))$; pero f coincide con $f|_S$ en cualquier punto de S , por lo que $f|_S(S \cap B_\delta(z_0)) \subset B_\varepsilon(f(z_0))$. Luego, por prop 3.25, $f|_S$ es continua en z_0 .

Para la segunda parte, si f es continua en cada punto de S , aplicando lo anterior, tenemos que $f|_S$ es continua en cada punto de S , de donde $f|_S$ es continua en S . \square

La continuidad de f en $z_0 = x_0 + iy_0$ está estrechamente vinculada a la de sus funciones de parte real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en (x_0, y_0) .

PROPOSICIÓN 3.28. *Una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ si, y sólo si, sus funciones componentes u y v son continuas en el punto (x_0, y_0) .*

DEMOSTRACIÓN. Si z_0 es un punto aislado del dominio de definición de la función, es directo ver la validez del enunciado. Supongamos entonces que z_0 es punto de acumulación del dominio. Por la proposición 3.14, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ si, y sólo si, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0)$, lo que equivale a decir que u y v son continuas en (x_0, y_0) . \square

EJEMPLO 3.29. La función $f(z) = |z|$ tiene $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $v(x, y) = 0$. Como funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} , ambas son continuas en todo el plano. De allí que $f(z)$ es continua en todo \mathbb{C} . \square

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de las consideraciones anteriores y de la proposición 3.15.

PROPOSICIÓN 3.30. *Si dos funciones son continuas en un punto, su suma y su producto son funciones continuas en ese punto; su cociente es una función continua en ese punto si la función del denominador es distinta de cero cuando se la evalúa en el punto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos f y g continuas en z_0 . Si éste es punto aislado del dominio de definición de las funciones, la continuidad de la suma se sigue inmediatamente. Si z_0 es punto de acumulación del dominio, dado que f y g son continuas en z_0 , los límites de ambas existen cuando z tiende a z_0 , por lo que, de acuerdo a la proposición 3.15,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = f(z_0) + g(z_0)$$

mostrando que $f + g$ es continua en z_0 . Similarmente se demuestra lo referido al producto y cociente de funciones. \square

Veamos qué ocurre con la continuidad de la composición de funciones.

PROPOSICIÓN 3.31. *Supongamos que f es una función de $D_1 \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} y que g es una función de $D_2 \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} , con $f(D_1) \subset D_2$. Supongamos también que z_0 es punto de acumulación de D_1 , que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe, y que g es continua en él. Entonces, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z)) = g(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z))$.*

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Consideremos $\varepsilon > 0$. Por continuidad de g en L , existe $r > 0$ tal que $g(D_2 \cap B_r(L)) \subset B_\varepsilon(g(L))$. Correspondiente a r , existe $\delta > 0$ tal que $f(D_1 \cap B_\delta^*(z_0)) \subset B_r(L)$. Ya que $f(D_1) \subset D_2$, se tiene también que $f(D_1 \cap B_\delta^*(z_0)) \subset D_2$, y, en consecuencia, $f(D_1 \cap B_\delta^*(z_0)) \subset D_2 \cap B_r(L)$. Por lo tanto,

$$(g \circ f)(D_1 \cap B_\delta^*(z_0)) = g(f(D_1 \cap B_\delta^*(z_0))) \subset g(D_2 \cap B_r(L)) \subset B_\varepsilon(g(L))$$

Entonces, por proposición 3.6, $\lim_{z \rightarrow z_0} (g \circ f)(z) = g(L)$, según queríamos mostrar. \square

TEOREMA 3.32. *Sean $f : D_1 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en $z_0 \in D_1$ y $g : D_2 \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en $f(z_0)$. Entonces $g \circ f$ es continua en z_0 .*

DEMOSTRACIÓN. Si z_0 es punto aislado de D_1 o $f(z_0)$ es punto aislado de D_2 , la continuidad de $g \circ f$ en z_0 es inmediata. Si z_0 es punto de acumulación de D_1 , por prop. 3.31, tenemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z)) = g(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)) = g(f(z_0))$. Luego, $g \circ f$ es continua en z_0 . \square

Ahora vamos con una formulación equivalente de continuidad en términos de preimágenes de conjuntos abiertos.

TEOREMA 3.33. *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. f es continua en D si, y sólo si, para todo subconjunto V que sea abierto en \mathbb{C} , existe un abierto G tal que $f^{-1}(V) = D \cap G$.*

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow Supongamos f continua en D . Sea V un abierto. Para cada $w \in V$, sea $P_w = \{z \in D : f(z) = w\}$, y $\varepsilon_w > 0$ tal que $B_{\varepsilon_w}(w) \subset V$. Si $P_w = \emptyset$, hagamos $G_w = \emptyset$. De lo contrario, por continuidad de f en D , para cada $z \in P_w$, existe $\delta_z > 0$ tal que $f(D \cap B_{\delta_z}(z)) \subset B_{\varepsilon_w}(w)$, y en este caso hagamos $G_w = \bigcup_{z \in P_w} B_{\delta_z}(z)$. En cualquier caso, G_w resulta abierto (teor. 2.10). Sea $G = \bigcup_{w \in V} G_w$, que resulta abierto (teor. 2.10), y mostremos, por doble inclusión, que $f^{-1}(V) = D \cap G$.

- Si $z_0 \in f^{-1}(V)$, $f(z_0) \in V$, por lo que $z_0 \in D$. Sea $w_0 = f(z_0)$. Tenemos que $z_0 \in P_{w_0}$, con lo que $G_{w_0} = \bigcup_{z \in P_{w_0}} B_{\delta_z}(z) \supset B_{\delta_{z_0}}(z_0)$, y entonces $z_0 \in G_{w_0} \subset G$.
- Si $z_0 \in G \cap D$, $z_0 \in D$ y existe $w \in V$ tal que $z_0 \in G_w$. Luego $G_w \neq \emptyset$, por lo que existe $z \in P_w$ tal que $z_0 \in B_{\delta_z}(z)$. Entonces, $z_0 \in D \cap B_{\delta_z}(z)$, y de allí que $f(z_0) \in B_{\varepsilon_w}(w) \subset V$. Luego, $z_0 \in f^{-1}(V)$.

\Leftarrow Sean $z_0 \in D$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $V = B_\varepsilon(f(z_0))$. V es abierto, por lo que, de la hipótesis, existe un abierto G tal que $f^{-1}(V) = G \cap D$. Ya que $z_0 \in f^{-1}(V)$, tenemos que $z_0 \in G$. Por ser G abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z_0) \subset G$. Luego, $f(B_\delta(z_0) \cap D) \subset f(G \cap D) = f(f^{-1}(V)) \subset V = B_\varepsilon(f(z_0))$. Luego, f es continua en z_0 . Como z_0 se eligió arbitrariamente en D , se tiene que f es continua en D . \square

COROLARIO 3.34. *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con D abierto en \mathbb{C} . f es continua en D si, y sólo si, para todo subconjunto V que sea abierto en \mathbb{C} , $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos f continua en D , y sea V abierto en \mathbb{C} . Existe un abierto G tal que $f^{-1}(V) = G \cap D$ (teor. 3.33). Siendo la intersección de dos abiertos, $f^{-1}(V)$ es abierto (teor. 2.10).

Recíprocamente, sea V cualquier abierto. Por hipótesis, $f^{-1}(V)$ es abierto. Por definición, tenemos que $f^{-1}(V) \subset D$, por lo que $f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap D$. Luego, tomando $G = f^{-1}(V)$, tenemos que $f^{-1}(V) = G \cap D$ con G abierto. De allí que, por teorema 3.33, f es continua en D . \square

COROLARIO 3.35. *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. f es continua en D si, y sólo si, para todo subconjunto U que sea cerrado en \mathbb{C} , existe un cerrado F tal que $f^{-1}(U) = D \cap F$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la ida, sea U cerrado. Luego, U^c es abierto, de donde $f^{-1}(U^c) = D \cap G$ para algún abierto G (teor. 3.33). Pero $f^{-1}(U^c) = D - f^{-1}(U)$. Luego, $D \cap G = D - f^{-1}(U)$. Como $f^{-1}(U) \subset D$, se sigue que $f^{-1}(U) = D \cap G^c$ (lema 2.14). Hagamos $F = G^c$. Se tiene que F es cerrado, y $f^{-1}(U) = D \cap F$.

Para la vuelta, sea V un abierto. Entonces V^c es cerrado, por lo que, de la hipótesis, existe un cerrado F tal que $f^{-1}(V^c) = D \cap F$, y entonces $D - f^{-1}(V) = D \cap F$, que implica que $f^{-1}(V) = D \cap F^c$ (lema 2.14). Haciendo $G = F^c$, tenemos que $f^{-1}(V) = D \cap G$ con G abierto. Ya que V es arbitrario, f es continua en D (teor. 3.33). \square

4.1. Continuidad, compacidad y conexidad. Las funciones continuas tienen la bonita propiedad de transformar subconjuntos compactos de su dominio en subconjuntos compactos de \mathbb{C} .

TEOREMA 3.36. *Sea $f : K \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en K . Si K es compacto, entonces $f(K)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{V_j\}_{j \in \Lambda}$ un cubrimiento por abiertos para $f(K)$. Para cada $j \in \Lambda$, existe un abierto G_j tal que $f^{-1}(V_j) = K \cap G_j$ (teor. 3.33).

Dado $z \in K$, existe $J \in \Lambda$ tal que $f(z) \in V_J$, por lo que $z \in f^{-1}(V_J) \subset G_J$. Esto muestra que la familia $\{G_j\}_{j \in \Lambda}$ es cubrimiento (por abiertos) para el compacto K , y entonces hay una subfamilia finita $\{G_{j_1}, \dots, G_{j_n}\}$ de $\{G_j\}_{j \in \Lambda}$ tal que $\bigcup_{k=1}^n G_{j_k} \supset K$.

Si $w \in f(K)$, existe $z \in K$ tal que $f(z) = w$. Por lo que vimos, existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z \in G_{j_k}$, de donde $z \in f^{-1}(V_{j_k})$, y entonces $f(z) \in V_{j_k}$, es decir, $w \in V_{j_k}$. Por lo tanto, $\{V_{j_1}, \dots, V_{j_n}\}$ es subcubrimiento finito de $\{V_j\}_{j \in \Lambda}$ para $f(K)$. Luego, $f(K)$ es compacto. \square

COROLARIO 3.37. *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si K es un subconjunto compacto de D y f es continua en K , entonces $f(K)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. De la prop. 3.27, $f|_K$ es continua en K . Sabemos que $f(K) = f|_K(K)$, pues $f(z) = f|_K(z)$ para todo $z \in K$. Por teorema 3.36, $f|_K(K)$ es compacto. Luego, $f(K)$ es compacto. \square

La función continua $f(z) = z$, considerada sobre el disco abierto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, cumple que su módulo no alcanza un máximo en D : no hay ningún z_0 en D tal que para todo $z \in D$ sea $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ (pues $\forall z \in D, |f(z)| < 1$ pero $|f(z)|$ toma valores arbitrariamente cercanos a 1 en D). El siguiente corolario muestra que esta situación no podría darse si el subconjunto D fuese un compacto; concretamente, expresa el hecho de que si una función continua se considera restringida a un conjunto compacto, entonces el módulo de la función alcanza un máximo y un mínimo en puntos del conjunto compacto, y en consecuencia una función continua definida sobre un compacto tiene módulo acotado. Este resultado se usará frecuentemente en los capítulos que siguen.

COROLARIO 3.38. *Sea $f : K \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que f es continua en K , y que K es compacto. Entonces, existen $z_m, z_M \in K$ tales que para todo $z \in K, |f(z_m)| \leq |f(z)| \leq |f(z_M)|$.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $E = \{|f(z)| : z \in K\} \subset \mathbb{R}$ y $s = \sup E$. Nótese que $E = (g \circ f)(K)$, en donde g es la función $|z|$, que es continua en \mathbb{C} , y en particular en K . Luego, $g \circ f$ es continua en K (teor. 3.32), y entonces E es un conjunto compacto de \mathbb{C} (teor. 3.36), y por lo tanto cerrado y acotado en \mathbb{C} (y consecuentemente en \mathbb{R} , según el corolario 2.17). Luego, $s \in E$ (prop. 2.19), lo que implica que existe $z_M \in K$ tal que $|f(z_M)| = s$. Por lo tanto, para todo $z \in K$, es $|f(z)| \leq |f(z_M)|$.

Para completar la demostración en cuanto a z_m , sea $g : K \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = |f(z_M)| - |f(z)|$. Nótese que g es continua en K , por obtenerse de suma y composición de funciones continuas. Además, para todo $z \in K$, es $|g(z)| = |f(z_M)| - |f(z)|$. Por lo tanto,

aplicando a g lo demostrado previamente, tenemos que existe $z_m \in K$ tal que, para todo $z \in K$, es $|g(z)| \leq |g(z_m)|$, es decir, $|f(z_m)| - |f(z)| \leq |f(z_m)| - |f(z_m)|$. Luego, para todo $z \in K$, es $|f(z)| \geq |f(z_m)|$. \square

Otra propiedad interesante de las funciones continuas es que transforman subconjuntos conexos en conexos.

TEOREMA 3.39. *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en D . Si D es conexo, entonces $f(D)$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar por contrarreciprocidad, supongamos que $f(D)$ no es conexo. Entonces, existen dos conjuntos abiertos disjuntos E y F tales que $f(D) \subset E \cup F$ y $E \cap f(D) \neq \emptyset \neq F \cap f(D)$. Hagamos $A = f^{-1}(E)$ y $B = f^{-1}(F)$. Siendo f continua en D , existen abiertos G_A y G_B tales que $A = D \cap G_A$ y $B = D \cap G_B$ (teor. 3.33).

- Ya que $E \cap f(D) \neq \emptyset$, existe $w \in E$ tal que $w \in f(D)$. Por ello, existe $z \in D$ tal que $f(z) = w \in E$, y entonces $z \in A$, de donde deducimos que A es no vacío. Análogamente, $B \neq \emptyset$.
- $A \cup B = D$ ya que

$$A \cup B = (D \cap G_A) \cup (D \cap G_B) = D \cap (G_A \cup G_B) \subset D$$

$$A \cup B = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F) = f^{-1}(E \cup F) \supset f^{-1}(f(D)) \supset D$$

- $G_A \cap B = \emptyset$ (pues si hubiera $z \in G_A \cap B$, tendríamos que $z \in G_A$, $z \in G_B$ y $z \in D$, de donde $z \in A$ y $z \in B$, por lo que $f(z) \in E$ y $f(z) \in F$, contradiciendo que $E \cap F = \emptyset$), y entonces, por lema 2.35,

$$\emptyset \subset A \cap \overline{B} \subset G_A \cap \overline{B} = \emptyset$$

De esto, vemos que $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Análogamente, $\overline{A} \cap B = \emptyset$

Luego, por teorema 2.36, D es desconexo. \square

COROLARIO 3.40. *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si C es un subconjunto conexo de D y f es continua en C , entonces $f(C)$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. De la prop. 3.27, $f|_C$ es continua en C . Puesto que $f(C) = f|_C(C)$, y que por el teorema 3.39, $f|_C(C)$ es conexo, concluimos que $f(C)$ es conexo. \square

COROLARIO 3.41. *Cualquier segmento del plano complejo es un conjunto conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, el segmento $[z_1, z_2] = \{(1-t)z_1 + tz_2 : 0 \leq t \leq 1\}$ es la imagen del conjunto conexo $[0, 1]$ (prop. 2.33) bajo la función $f(z) = z_1(1 - \operatorname{Re} z) + z_2 \operatorname{Re} z$, que es continua por consistir en productos y sumas de funciones continuas. Por lo tanto, el resultado se sigue del corolario 3.40. \square

4.2. Continuidad uniforme. Ahora vamos a definir un tipo especial de continuidad, que será útil posteriormente. Analizando con cuidado la definición de continuidad, podemos observar que una función es continua en un subconjunto S de su dominio si

$$\forall z \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall w \in D, |z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

Nótese que, de acuerdo a esta definición, fijados z y ε , es posible obtener un δ que podría variar si cambia ε o cambia z .

DEFINICIÓN 3.42. Sean $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, y $S \subset D$. Se dice que f es **uniformemente continua en S** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in S, \forall w \in D, |z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

Es decir, en la continuidad uniforme, fijado ε , se obtiene δ que sirve para todo $z \in S$. Obviamente, toda función uniformemente continua en S es continua en S , pero la recíproca no es cierta en general. Sin embargo, hay un importante caso en que una función continua es uniformemente continua.

PROPOSICIÓN 3.43. Si K es compacto y f es una función continua en K , entonces f es uniformemente continua en K .

DEMOSTRACIÓN. Llamemos D al dominio de f . Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de f en K , para cada $z \in K$ existe $\delta_z > 0$ tal que $\forall w \in D, |z - w| < 2\delta_z \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon/2$. La familia de entornos $\{B_{\delta_z}(z)\}_{z \in K}$ es cubrimiento por abiertos para el compacto K , por lo que hay una subfamilia finita $\{B_{\delta_k}(z_k)\}_{k=1}^n$ que es cubrimiento para K (cada z_k está en K , cada δ_k es positivo). Sea δ el mínimo de los radios de estos entornos, el cual resultará ser positivo. Ahora tomemos $z \in K$, y $w \in D$ a distancia menor que δ de z . Debe existir $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z \in B_{\delta_j}(z_j)$. Entonces $|z_j - z| < 2\delta_j$ y también

$$|z_j - w| \leq |z_j - z| + |z - w| < \delta_j + \delta \leq 2\delta_j$$

con lo cual, por estar z_j en K y por elección de δ_j , es $|f(z_j) - f(z)| < \varepsilon/2$ y $|f(z_j) - f(w)| < \varepsilon/2$. De allí que

$$|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f(z_j)| + |f(z_j) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

con lo que queda demostrado que la continuidad es uniforme. \square

5. Derivabilidad

DEFINICIÓN 3.44. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, y sea z_0 un punto interior de D . f se dice **derivable en z_0** (o también **diferenciable en z_0**) si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe; en tal caso, dicho límite se llama la **derivada de f en z_0** y se denota por $f'(z_0)$ o también $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z_0}$.

La expresión $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ se llama *cociente incremental en z_0* . A través del cambio de variable $\Delta z = z - z_0$, la derivada de f en z_0 también puede expresarse como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

EJEMPLO 3.45. A través de la definición, encontremos la derivada de la función $f(z) = (1 + 2i)z^2$ en todos los puntos en que exista.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(1 + 2i)(z_0 + \Delta z)^2 - (1 + 2i)z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2(1 + 2i)z_0\Delta z + (1 + 2i)(\Delta z)^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(2(1 + 2i)z_0 + (1 + 2i)\Delta z)\Delta z}{\Delta z} = 2(1 + 2i)z_0 \end{aligned}$$

La función f es entonces derivable en cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$. \square

EJEMPLO 3.46. Encontremos la derivada de la función $f(z) = |z|^2$ en todos los puntos en que exista.

■ En $z_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 - 0}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$$

■ Para $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$ y $z = x + iy \neq z_0$, es

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \frac{x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

Si restringimos a la recta $y = y_0$, es $z = x + iy_0$, y por esta trayectoria el cociente incremental tiene límite que vale

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Si restringimos a la recta $x = x_0$, es $z = x_0 + iy$, y por esta trayectoria el cociente incremental tiene límite que vale

$$l_2 = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y^2 - y_0^2}{i(y - y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{i}(y + y_0) = -2iy_0$$

Como $x_0 \neq 0$ o $y_0 \neq 0$, no puede ser $l_1 = l_2$. Por lo tanto no existe el límite del cociente si $z_0 \neq 0$.

En conclusión, la función f es derivable sólo en 0. \square

Deduciremos ahora propiedades de la derivada de funciones de variable compleja, similares a las conocidas para funciones de variable real.

PROPOSICIÓN 3.47. *Si una función compleja es derivable en un punto, es continua en dicho punto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función compleja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en z_0 . Entonces, para cualquier $z \in D - \{z_0\}$, es

$$f(z) = (z - z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + f(z_0)$$

Como $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = 0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} = f'(z_0)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z_0) = f(z_0)$, podemos aplicar a la igualdad anterior la proposición 3.15 para deducir que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, de donde deducimos que f es continua en z_0 . \square

De la definición, es directo ver que las funciones constantes son derivables en cualquier punto interior de su dominio, y que la derivada vale siempre 0. La derivación en \mathbb{C} conserva además algunas propiedades básicas ya conocidas en \mathbb{R} .

PROPOSICIÓN 3.48. *Sean f y g funciones complejas derivables ambas en z_0 , y sea k una constante compleja. Entonces:*

1. $\left. \frac{d(kf(z))}{dz} \right|_{z_0} = kf'(z_0)$
2. $\left. \frac{d(f(z) + g(z))}{dz} \right|_{z_0} = f'(z_0) + g'(z_0)$
3. $\left. \frac{d(f(z)g(z))}{dz} \right|_{z_0} = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
4. Si además es $g(z_0) \neq 0$, entonces $\left. \frac{d(f(z)/g(z))}{dz} \right|_{z_0} = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$

DEMOSTRACIÓN. La primera es sencilla de verificar a través de la definición de derivada, y queda como ejercicio. Para las otras, observemos que, dado que existen $f'(z_0)$ y $g'(z_0)$, de acuerdo a la proposición 3.17, existen funciones $\lambda_f(z)$ y $\lambda_g(z)$ tales que $\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda_f(z) = 0 =$

$\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda_g(z)$ y

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\lambda_f(z) \quad g(z) = g(z_0) + (z - z_0)g'(z_0) + (z - z_0)\lambda_g(z)$$

Por lo tanto, para $z \neq z_0$, es

$$\frac{f(z) + g(z) - f(z_0) - g(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + g'(z_0) + \lambda_f(z) + \lambda_g(z)$$

con $\lim_{z \rightarrow z_0} (\lambda_f(z) + \lambda_g(z)) = 0$. Luego, nuevamente por la proposición 3.17, es $\left. \frac{d(f(z) + g(z))}{dz} \right|_{z_0} = f'(z_0) + g'(z_0)$. Con consideraciones análogas, se demuestra lo relativo a la derivada del producto y del cociente. \square

OBSERVACIÓN 3.49. De la definición de derivada, es directo ver que la función identidad $f(z) = z$ es derivable en todo \mathbb{C} . Aplicando una sencilla inducción y la proposición 3.48, se deduce que, para cualquier entero $n > 0$, z^n es derivable en todo el plano, y su derivada vale nz^{n-1} . De allí que cualquier polinomio en \mathbb{C} sea también derivable en todo \mathbb{C} .

Además, para n entero negativo, z^n es derivable en cualquier complejo no nulo, pues es el cociente entre 1 y $z^{|n|}$, siendo ambas derivables en todo \mathbb{C} pero anulándose el denominador en 0. Más generalmente, las funciones racionales son derivables en todo el plano, excepto en las raíces del polinomio denominador.

La regla de la cadena vale también para el caso complejo.

PROPOSICIÓN 3.50. Sean $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : f(D) \rightarrow \mathbb{C}$ tales que f es derivable en z_0 y g es derivable en $f(z_0)$. Entonces, $g \circ f$ es derivable en z_0 , y la derivada vale $g'(f(z_0))f'(z_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Por proposición 3.17, existen $\lambda_1 : D \rightarrow \mathbb{C}$ y $\lambda_2 : f(D) \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda_1(z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow f(z_0)} \lambda_2(z) = 0$ y

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)(f'(z_0) + \lambda_1(z)) \quad g(z) = g(f(z_0)) + (z - f(z_0))(g'(f(z_0)) + \lambda_2(z))$$

Redefiniendo λ_2 en $f(z_0)$ en caso de ser necesario, podemos suponer que λ_2 es continua en $f(z_0)$, es decir, $\lambda_2(f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow f(z_0)} \lambda_2(z) = 0$.

Para cualquier $z \in D$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= g(f(z_0)) + (f(z) - f(z_0))(g'(f(z_0)) + \lambda_2(f(z))) \\ &= g(f(z_0)) + (z - z_0)(f'(z_0) + \lambda_1(z))(g'(f(z_0)) + \lambda_2(f(z))) \end{aligned}$$

por lo que, para $z \neq z_0$, es

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = (f'(z_0) + \lambda_1(z))(g'(f(z_0)) + \lambda_2(f(z)))$$

Por prop. 3.31, siendo λ_2 continua en $f(z_0)$, tenemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda_2(f(z)) = \lambda_2\left(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)\right) = \lambda_2(f(z_0)) = 0$. Por lo tanto, en la expresión del cociente incremental, tomando límites cuando z tiende a z_0 , tenemos el resultado que buscábamos. \square

Veremos ahora cómo valernos de las partes real e imaginaria $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de una función f para analizar su derivabilidad.

TEOREMA 3.51. (Condición necesaria de derivabilidad)

Supongamos que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tiene derivada en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces las derivadas parciales u_x , u_y , v_x y v_y existen en (x_0, y_0) y se verifican las siguientes igualdades, denominadas **Ecuaciones de Cauchy–Riemann**:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que la función posee derivada, la expresión $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ se aproxima a $f'(z_0)$ cualquiera sea la trayectoria por la que z se aproxima a z_0 . En particular, cuando lo hace a través de líneas paralelas a los ejes.

- Si hacemos tender z a z_0 por una línea paralela al eje real, tendremos entonces que $z = x + iy_0$. La condición de tender z a z_0 resulta equivalente a la de tender x a x_0 . Por

lo tanto, teniendo presente la proposición 3.14, resulta

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
 &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

- Si ahora hacemos tender z a z_0 por una línea paralela al eje imaginario, tendremos entonces que $z = x_0 + iy$. La condición de tender z a z_0 resulta equivalente a la de tender y a y_0 . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} \\
 &= \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \right) \\
 &= -i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
 &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)
 \end{aligned}$$

Si igualamos las dos expresiones para $f'(z_0)$ anteriormente obtenidas, llegamos a la conclusión de que $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ y $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$. \square

La demostración anterior nos dice también que, en caso de ser derivable f en z_0 , el valor de la derivada se puede obtener a partir de u y v de cualquiera de las dos formas siguientes:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

EJEMPLO 3.52. Consideremos la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = x + y^2$ y $v(x, y) = y - x$. Las cuatro derivadas parciales existen en todo el plano, y valen $u_x(x, y) = 1$, $u_y(x, y) = 2y$, $v_x(x, y) = -1$ y $v_y(x, y) = 1$. Vemos que cualquier punto (x, y) satisface que $u_x(x, y) = v_y(x, y)$, en tanto que la condición $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ sólo se satisface para los puntos del plano con $y = 1/2$. Concluimos entonces que, con total seguridad, la función no posee derivada en los complejos z tales que $\text{Im } z \neq \frac{1}{2}$. A través de las ecuaciones de Cauchy–Riemann, nada podemos decir de la existencia de la derivada en los puntos sobre la recta $\text{Im } z = \frac{1}{2}$, pues el cumplimiento de las mismas es condición necesaria pero no suficiente para que la función sea derivable en un punto. \square

EJEMPLO 3.53. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ y $v(x, y) = 0$. Veremos que, para esta función, se satisfacen las condiciones de Cauchy–Riemann en el origen, y sin embargo no es derivable allí, mostrando entonces que el cumplimiento de las ecuaciones es una **condición necesaria pero no suficiente** para la derivabilidad de una función compleja en un punto.

Calcularemos las derivadas parciales de u en $(0, 0)$ usando la definición:

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

y, por simetría de la definición de u en términos de x e y , también es $u_y(0, 0) = 0$. Además, siendo v constantemente nula, es $v_x(0, 0) = 0 = v_y(0, 0)$. Por lo tanto, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann en 0.

Por otro lado,

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\sqrt{|xy|} (x - iy)}{x + iy (x - iy)} = \frac{x\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} - i \frac{y\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2}$$

Si nos aproximamos a $(0, 0)$ por el semieje positivo de las x , la parte real de esta función tiene límite 0, mientras que si nos aproximamos por la recta $y = x$ desde el primer cuadrante, el límite es $(1 - i)/2$. En consecuencia, la parte real del cociente incremental $\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ no tiene límite, y por lo tanto el cociente tampoco (prop. 3.14). Entonces no existe $f'(0)$, pese a satisfacerse allí las ecuaciones de Cauchy–Riemann. \square

El cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy–Riemann en z_0 , junto a la continuidad de las derivadas parciales de u y v respecto de x y de y en un entorno de z_0 , permiten garantizar, gracias al Teorema de los Incrementos finitos para funciones reales de dos variables, la derivabilidad de la función compleja en z_0 .

TEOREMA 3.54. (Condición suficiente de derivabilidad)

Supongamos que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, y que las derivadas parciales u_x , u_y , v_x y v_y son continuas en un entorno de (x_0, y_0) . Entonces, la función f es derivable en z_0 .

DEMOSTRACIÓN. Dado que las derivadas parciales u_x , u_y , v_x y v_y son continuas en todo un entorno de (x_0, y_0) , por el Teorema de los Incrementos Finitos, las funciones u y v admiten en ese entorno, para $z = x + iy$, una expresión de la forma

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + (x - x_0)u_x(x_0, y_0) + (y - y_0)u_y(x_0, y_0) + \\ &\quad (x - x_0)\lambda_1(x, y) + (y - y_0)\lambda_2(x, y) \\ v(x, y) &= v(x_0, y_0) + (x - x_0)v_x(x_0, y_0) + (y - y_0)v_y(x_0, y_0) + \\ &\quad (x - x_0)\lambda_3(x, y) + (y - y_0)\lambda_4(x, y) \end{aligned}$$

en donde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \lambda_1(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \lambda_2(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \lambda_3(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \lambda_4(x, y) = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) \\ &= u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0)) \\ &= (x - x_0)u_x(x_0, y_0) + (y - y_0)u_y(x_0, y_0) + (x - x_0)\lambda_1(x, y) + \\ &\quad (y - y_0)\lambda_2(x, y) + i(x - x_0)v_x(x_0, y_0) + i(y - y_0)v_y(x_0, y_0) + \\ &\quad i(x - x_0)\lambda_3(x, y) + i(y - y_0)\lambda_4(x, y) \end{aligned}$$

Como se satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann en (x_0, y_0) , tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= (x - x_0)u_x(x_0, y_0) - (y - y_0)v_x(x_0, y_0) + (x - x_0)\lambda_1(x, y) + \\ &\quad (y - y_0)\lambda_2(x, y) + i(x - x_0)v_x(x_0, y_0) + i(y - y_0)u_x(x_0, y_0) + \\ &\quad i(x - x_0)\lambda_3(x, y) + i(y - y_0)\lambda_4(x, y) \\ &= ((x - x_0) + i(y - y_0))u_x(x_0, y_0) + i((x - x_0) + i(y - y_0))v_x(x_0, y_0) + \\ &\quad (x - x_0)(\lambda_1(x, y) + i\lambda_3(x, y)) + (y - y_0)(\lambda_2(x, y) + i\lambda_4(x, y)) \end{aligned}$$

Luego, para z en el entorno reducido alrededor de z_0 , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \\ &\quad \frac{\operatorname{Re}(z - z_0)}{z - z_0}(\lambda_1(x, y) + i\lambda_3(x, y)) + \frac{\operatorname{Im}(z - z_0)}{z - z_0}(\lambda_2(x, y) + i\lambda_4(x, y)) \end{aligned}$$

Por propiedades de módulo, tenemos que

$$\left| \frac{\operatorname{Re}(z - z_0)}{z - z_0} \right| \leq 1 \quad \left| \frac{\operatorname{Im}(z - z_0)}{z - z_0} \right| \leq 1$$

y además, por proposición 3.14,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (\lambda_1(x, y) + i\lambda_3(x, y)) = 0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (\lambda_2(x, y) + i\lambda_4(x, y))$$

Por lo que, de la proposición 3.16, resulta

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{\operatorname{Re}(z - z_0)}{z - z_0} (\lambda_1(x, y) + i\lambda_3(x, y)) \right) = 0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{\operatorname{Im}(z - z_0)}{z - z_0} (\lambda_2(x, y) + i\lambda_4(x, y)) \right)$$

Luego, el límite del cociente incremental existe y vale

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Es decir, f es derivable en z_0 . \square

EJEMPLO 3.55. Para $f(z) = e^z$, tenemos que $u(x, y) = e^x \cos y$ y que $v(x, y) = e^x \sin y$, de donde

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= e^x \cos y & u_y(x, y) &= -e^x \sin y \\ v_x(x, y) &= e^x \sin y & v_y(x, y) &= e^x \cos y \end{aligned}$$

Las cuatro derivadas parciales existen y son continuas en todo el plano, y también las ecuaciones de Cauchy–Riemann se cumplen en todo punto. Por lo tanto, e^z es derivable en todo \mathbb{C} . Su derivada vale

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

Por aplicación de las proposiciones 3.48 y 3.50, también son derivables en todo \mathbb{C} las funciones e^{-z} , e^{iz} y e^{-iz} , por lo que $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ y $\cosh z$ son también derivables en todo el plano complejo, y sus derivadas valen, respectivamente, $\cos z$, $-\sin z$, $\cosh z$ y $\sinh z$. La función $\tan z$ es derivable en todo \mathbb{C} excepto en los valores de z para los cuales $\cos z = 0$, y su derivada vale $\sec^2 z$. Análogamente se analiza la derivabilidad de las otras funciones trigonométricas e hiperbólicas. \square

5.1. Ecuaciones de Cauchy–Riemann en coordenadas polares. Cuando las partes real e imaginaria u y v de una función f están en función de las coordenadas polares de z , podemos verificar el cumplimiento de las condiciones de Cauchy–Riemann en cualquier punto distinto de 0, empleando las derivadas parciales respecto de r y θ , a través de las siguientes expresiones:

$$u_r(r, \theta) = \frac{1}{r} v_\theta(r, \theta) \quad v_r(r, \theta) = -\frac{1}{r} u_\theta(r, \theta)$$

y, si existe $f'(z)$, ésta se puede calcular mediante

$$f'(z) = (u_r(r, \theta) + iv_r(r, \theta))e^{-i\theta} = (u_\theta(r, \theta) + iv_\theta(r, \theta)) \left(-\frac{i}{r} \right) e^{-i\theta}$$

Estas expresiones se deducen por la regla de la cadena para funciones de dos variables: teniendo $u = u(r, \theta)$, $v = v(r, \theta)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\tan \theta = \frac{y}{x}$, será $r_x = \cos \theta$, $r_y = \sin \theta$, $\theta_x = -\frac{\sin \theta}{r}$ y $\theta_y = \frac{\cos \theta}{r}$, de donde

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\sin \theta}{r} & u_y &= u_r \sin \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{r} \\ v_x &= v_r \cos \theta - v_\theta \frac{\sin \theta}{r} & v_y &= v_r \sin \theta + v_\theta \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned}$$

de modo que, reemplazando en las ecuaciones de Cauchy–Riemann originales ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) y manipulando algebraicamente, se llega a las expresiones en forma polar señaladas más arriba.

EJEMPLO 3.56. Para $f(z) = \operatorname{Ln} z$, es $u(r, \theta) = \ln r$ y $v(r, \theta) = \theta = \operatorname{Arg} z$. Por lo tanto, para todo $z \neq 0$, es $u_r = 1/r$, $u_\theta = 0$, $v_r = 0$ y $v_\theta = 1$. Se satisfacen entonces las ecuaciones de Cauchy–Riemann (en coordenadas polares) para todo $z \neq 0$. Además, para $r \neq 0$ y $-\pi < \theta < \pi$, las expresiones u_r , u_θ , v_r , v_θ , $\cos \theta$, $-\frac{\sin \theta}{r}$, $\sin \theta$ y $\frac{\cos \theta}{r}$ son todas continuas, de donde u_x , u_y , v_x y v_y también lo son. De allí que, por el teorema 3.54, la función $\operatorname{Ln} z$ es derivable en todo el plano complejo excepto en 0 y en el semieje real negativo (donde no es derivable pues no es continua, ya que $\operatorname{Arg} z$ no es continua allí, según vimos en el ejemplo 3.24). La derivada en $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, con $r_0 \neq 0$ y $-\pi < \theta_0 < \pi$, vale

$$f'(z_0) = (u_r(r_0, \theta_0) + i v_r(r_0, \theta_0)) e^{-i\theta_0} = \frac{1}{r_0} e^{-i\theta_0} = \frac{1}{r_0 e^{i\theta_0}} = \frac{1}{z_0}$$

□

6. Analiticidad

Veremos ahora un concepto más fuerte que el de derivabilidad, y que es clave en la teoría de funciones de variable compleja.

DEFINICIÓN 3.57. Una función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es **analítica en un punto** z_0 si existe $r > 0$ tal que f es derivable en cada punto de $B_r(z_0)$. f se dice **analítica en un conjunto** si es analítica en cada punto de ese conjunto. f se dice **entera** si es analítica en todo el plano complejo.

Como vemos, la analiticidad en z_0 exige la derivabilidad no sólo en z_0 , sino también en todo un entorno alrededor de z_0 . Una función puede entonces tener derivada en un punto sin ser analítica en ese punto (ver ejemplo 3.59). Puntualicemos que no es correcto hablar de una función analítica sin especificar el conjunto donde se considera la analiticidad.

DEFINICIÓN 3.58. Un punto z_0 es una **singularidad** de una función f si ocurre que f no es analítica en z_0 , pero todo entorno de z_0 contiene un punto donde f es analítica. Una singularidad de f se dice **aislada** si admite un entorno en el que no hay otra singularidad de f .

Ilustremos mediante ejemplos los conceptos que acabamos de definir.

EJEMPLO 3.59. Vimos, en el ejemplo 3.46, que la función $f(z) = |z|^2$ sólo es derivable en $z = 0$; por lo tanto, cualquier entorno de 0 contiene puntos donde no existe la derivada, y en consecuencia $f(z)$ no es analítica en $z = 0$, ni en ningún otro punto. Notar que f no tiene singularidades. □

EJEMPLO 3.60. Cualquier función racional es derivable en todo el plano excepto en los puntos en que el denominador se anula (observ. 3.49). En consecuencia, toda función racional es analítica en todo el plano excepto en las raíces del polinomio denominador, que resultan ser singularidades evidentemente aisladas. □

EJEMPLO 3.61. $h(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$. El numerador es una función constante, y por lo tanto derivable en \mathbb{C} . Como la función seno es derivable en todo \mathbb{C} (ej. 3.55), por prop. 3.50 se tiene que el denominador $\sin(1/z)$ es derivable en $\mathbb{C} - \{0\}$; además, se anula en los reales de la forma $\frac{1}{2k\pi}$ cualquiera sea $k \in \mathbb{Z}$. Sea $F = \{0\} \cup \{\frac{1}{2k\pi} : k \in \mathbb{Z}\}$, el cual es cerrado en \mathbb{C} . Por proposición 3.48, h resulta derivable en $\mathbb{C} - F$. Cada $z \in \mathbb{C} - F$ admite $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset \mathbb{C} - F$. Por ello, h es analítica en $\mathbb{C} - F$. Cualquier entorno alrededor de cualquier punto en F contiene puntos del semiplano superior, donde, según vimos, h es analítica. Por lo tanto, cada complejo en F es una singularidad de h ; los complejos de la forma $\frac{1}{2k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$ son singularidades aisladas, mientras que 0 es una singularidad no aislada, pues para cualquier $r > 0$ se puede elegir $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 1/(2\pi r)$, teniéndose que la correspondiente singularidad no nula $1/(2k\pi)$ está en $B_r(0)$. □

EJEMPLO 3.62. La función $\operatorname{Ln} z$, cuya derivabilidad estudiamos en el ejemplo 3.56, resulta analítica en todo el plano excepto en 0 y en el semieje real negativo. Cualquier real negativo o nulo resulta entonces una singularidad no aislada de $\operatorname{Ln} z$. \square

Dado que una función derivable en un punto necesariamente satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann en ese punto, de la definición de analiticidad se desprende inmediatamente el siguiente resultado.

TEOREMA 3.63. (Condición necesaria de analiticidad) *Supongamos que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces existe un entorno de z_0 tal que las ecuaciones de Cauchy–Riemann se verifican en todo punto de él.*

TEOREMA 3.64. (Condición suficiente de analiticidad) *Supongamos que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisface las ecuaciones de Cauchy–Riemann en un entorno B del punto $z_0 = x_0 + iy_0$, y que las derivadas parciales u_x , u_y , v_x y v_y son continuas en todo punto de B . Entonces, la función f es analítica en z_0 .*

DEMOSTRACIÓN. Sea z_1 perteneciente a B , y sea r tal que $B_r(z_1) \subset B$. Entonces, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann en z_1 , y además u_x , u_y , v_x y v_y son continuas en todo punto de $B_r(z_1)$. Luego, la función es derivable en z_1 . Como z_1 es arbitrario en B , se sigue que la función es derivable en todo punto de B . En consecuencia, la función es analítica en z_0 . \square

EJEMPLO 3.65. Analicemos los puntos del plano en los que es analítica la función $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

De entrada, vemos que la función no es analítica en 0 pues no está definida allí. Para $(x, y) \neq (0, 0)$, tenemos que

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & u_y(x, y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ v_x(x, y) &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & v_y(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

- Las ecuaciones de Cauchy–Riemann se satisfacen en todo el plano complejo, excepto 0.
- Las cuatro derivadas parciales son sumas, productos, cocientes y composición de funciones que son continuas en todo \mathbb{R}^2 salvo $(0, 0)$, y en consecuencia son funciones continuas en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Luego, las condiciones suficientes de analiticidad se satisfacen en todo el plano complejo excepto el 0. De allí que la función $f(z)$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$. \square

Por supuesto, el ejemplo anterior podría haber sido resuelto también, y de manera más directa, si hubiésemos advertido desde el principio que $f(z)$ es la función racional $1/z$, analítica $\mathbb{C} - \{0\}$.

El comportamiento algebraico de las funciones analíticas es el que la proposición 3.48 nos deja fácilmente entrever.

TEOREMA 3.66. *Si dos funciones son analíticas en un punto, la suma y el producto son analíticas en ese punto. El cociente de estas funciones es analítico en el punto, excepto que el denominador se anule allí.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f_1 y f_2 son analíticas en z_0 . Existen entonces reales positivos r_1 y r_2 tales que f_1 es derivable en todo punto de $B_{r_1}(z_0)$ y f_2 es derivable en todo punto de $B_{r_2}(z_0)$.

- Si elegimos $r = \min\{r_1, r_2\}$, tendremos que f_1 y f_2 son ambas derivables en todo punto de $B_r(z)$, y por lo tanto $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$ son ambas derivables en todo punto de $B_r(z)$ (prop. 3.48). Esto muestra que $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$ son ambas analíticas en z_0 .

- Supongamos además que $f_2(z_0) \neq 0$. Siendo f_2 analítica en z_0 , es derivable, y por lo tanto continua en z_0 . Por prop. 3.26, existe $r_3 > 0$ tal que para todo $z \in B_{r_3}(z_0)$ es $f_2(z) \neq 0$. Eligiendo entonces $r = \min\{r_1, r_2, r_3\}$ tenemos que para todo $z \in B_r(z_0)$ existen $f'_1(z)$ y $f'_2(z)$ con $f_2(z) \neq 0$. Luego, f_1/f_2 es derivable en todo punto de $B_r(z_0)$ (prop. 3.48) y, en consecuencia, f_1/f_2 es analítica en z_0 . \square

La analiticidad también se preserva bajo composición.

TEOREMA 3.67. *Si f es analítica en z_0 y g es analítica en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es analítica en z_0 .*

DEMOSTRACIÓN. Sea r_1 tal que f es derivable en cada punto de $B_{r_1}(z_0)$, y sea r_2 tal que g es derivable en cada punto de $B_{r_2}(f(z_0))$. Por continuidad de f en z_0 , existe $r_3 > 0$ tal que si $|z - z_0| < r_3$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < r_2$. Tomando $r = \min\{r_1, r_3\}$, tenemos que para cualquier $z_1 \in B_r(z_0)$ es f derivable en z_1 y g derivable en $f(z_1)$. Por prop. 3.50, $g \circ f$ es derivable en cada punto de $B_r(z_0)$, y entonces $g \circ f$ es analítica en z_0 . \square

EJEMPLO 3.68. Consideremos

$$f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Dado que las funciones z , cz ($c \in \mathbb{C}$) y e^z son derivables en todo el plano, y que $f(z)$ se puede obtener como composición y suma de ellas, $f(z)$ resulta analítica en todo el plano complejo. Análogamente, la función $\sin z$ es entera. En consecuencia, la función $\tan z$ es analítica en todo punto del plano tal que $\cos z \neq 0$. Por lo tanto, $\tan z$ es analítica en $\mathbb{C} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. \square

6.1. Analiticidad de funciones elementales. Para generalizar el ejemplo 3.68, digamos que los teoremas 3.64, 3.66 y 3.67 permiten estudiar fácilmente la analiticidad de muchas de las funciones de variable compleja que ya conocemos, y obtener su derivada. En la siguiente tabla resumimos esta información para las funciones polinómicas, exponencial, trigonométricas e hiperbólicas, indicando con \mathcal{D} el mayor subconjunto de \mathbb{C} en donde cada función es analítica.

$f(z)$	\mathcal{D}	$f'(z)$	$f(z)$	\mathcal{D}	$f'(z)$
z^n ($n \in \mathbb{N}$)	\mathbb{C}	nz^{n-1}	e^z	\mathbb{C}	e^z
$\sin z$	\mathbb{C}	$\cos z$	$\cos z$	\mathbb{C}	$-\sin z$
$\tan z$	$\mathbb{C} - \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\sec^2 z$	$\cot z$	$\mathbb{C} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$-\operatorname{cosec}^2 z$
$\sec z$	$\mathbb{C} - \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan z \sec z$	$\operatorname{cosec} z$	$\mathbb{C} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$-\cot z \operatorname{cosec} z$
$\sinh z$	\mathbb{C}	$\cosh z$	$\cosh z$	\mathbb{C}	$\sinh z$
$\tanh z$	$\mathbb{C} - \{i\pi/2 + ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\operatorname{sech}^2 z$	$\coth z$	$\mathbb{C} - \{ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$-\operatorname{csch}^2 z$
$\operatorname{sech} z$	$\mathbb{C} - \{i\pi/2 + ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$-\tanh z \operatorname{sech} z$	$\operatorname{csc} z$	$\mathbb{C} - \{ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$-\coth z \operatorname{csch} z$

7. Funciones Armónicas

Un resultado que estaremos en condiciones de demostrar más adelante en este curso es que el cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy–Riemann y la continuidad de las derivadas parciales en todo un entorno de un punto son también necesarias para la analiticidad de una función en ese punto. Como consecuencia de ello, deduciremos que si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D , entonces:

- f admite derivadas de todos los órdenes en D , y son todas funciones analíticas en D
- u y v admiten derivadas parciales de todos los órdenes respecto de x y de y , y son todas funciones continuas en D .

En lo que resta de este capítulo, asumiremos estos hechos como demostrados (aún cuando la demostración queda pendiente) para mostrar propiedades matemáticas interesantes de las funciones analíticas.

Supongamos que $u(x, y)$ es una función real en x e y , definida en algún subconjunto D abierto y conexo de \mathbb{R}^2 , y queremos saber si corresponde a la parte real de alguna función que sea analítica en D . Es decir, ¿será posible encontrar $v(x, y)$ definida en el mismo dominio, de manera tal que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en D ?

Supongamos que sí. Entonces, por satisfacer f las ecuaciones de Cauchy–Riemann en D , se tiene que $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ y $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ en todo punto de D . Teniendo presente lo que dijimos al comienzo, derivemos ambas ecuaciones parcialmente, miembro a miembro, la primera respecto de x y la segunda respecto de y , resultando que, para cada $(x, y) \in D$, se cumple que

$$u_{xx}(x, y) = v_{yx}(x, y) \quad u_{yy}(x, y) = -v_{xy}(x, y)$$

Además, siendo las segundas derivadas parciales todas continuas (también por lo que dijimos al principio), el orden de derivación en las derivadas cruzadas no influye, y tendremos que $v_{yx}(x, y) = v_{xy}(x, y)$. De este modo, sumando miembro a miembro las expresiones anteriores, llegamos a que $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in D$. Es decir, u satisface la **ecuación de Laplace**¹ en D . Recordemos que el *operador laplaciano* puede expresarse como $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, de modo que $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

DEFINICIÓN 3.69. Una función u es **armónica** en un dominio si sus segundas derivadas parciales existen y son continuas en ese dominio, y además se satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en dicho dominio.

Si a partir de las ecuaciones de Cauchy–Riemann derivamos parcialmente miembro a miembro, la primera respecto de y y la segunda respecto de x , y aplicamos las mismas consideraciones, llegamos a que v también es armónica en D . Tenemos entonces el siguiente resultado.

TEOREMA 3.70. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica en un dominio D . Entonces, u y v son funciones armónicas en D .

EJEMPLO 3.71. La función $f(z) = \cos z$ es entera. Tenemos que

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} = \frac{e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x + e^y \cos x - ie^y \sin x}{2} \\ &= \frac{(e^{-y} + e^y) \cos x}{2} + i \frac{(e^{-y} - e^y) \sin x}{2} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{(e^{-y} + e^y) \cos x}{2} \\ u_x(x, y) &= -\frac{(e^{-y} + e^y) \sin x}{2} & u_y(x, y) &= \frac{(-e^{-y} + e^y) \cos x}{2} \\ u_{xx}(x, y) &= -\frac{(e^{-y} + e^y) \cos x}{2} & u_{yy}(x, y) &= \frac{(e^{-y} + e^y) \cos x}{2} \end{aligned}$$

Entonces, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$. Como vemos, u es armónica en todo el plano. Lo mismo se puede verificar para v . \square

Volviendo al problema planteado al inicio de esta sección, podemos responder a la pregunta afirmativamente, en caso de que la función u sea armónica y el dominio D sea *simplemente conexo*. Intuitivamente, un dominio es simplemente conexo cuando “no posee agujeros” en su interior (daremos una definición más formal posteriormente). Por ejemplo, cualquier entorno es un dominio simplemente conexo, no así los entornos reducidos o las coronas de tipo $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ ($0 < r_1 < r_2$).

¹Pierre Simon Laplace (1749-1827). Astrónomo, físico y matemático francés. Descubrió la ecuación diferencial que lleva su nombre cuando estudiaba la gravitación y su relación con el movimiento planetario.

TEOREMA 3.72. Sea $u(x, y)$ una función real armónica en un dominio simplemente conexo D . Existe una función $v(x, y)$ armónica en D tal que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D .

Omitiremos la demostración del teorema anterior. Cualquier función v de las que enuncia el teorema se denomina una **armónica conjugada de u en el dominio D** . Todas las armónicas conjugadas de u difieren en una constante, y pueden ser encontradas por integración a partir de las ecuaciones de Cauchy–Riemann, como mostramos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.73. La función $u(x, y) = e^x \cos y$ es armónica en \mathbb{R}^2 , pues

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= e^x \cos y & u_{xx}(x, y) &= e^x \cos y \\ u_y(x, y) &= -e^x \sin y & u_{yy}(x, y) &= -e^x \cos y \end{aligned}$$

de modo que $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ en todo \mathbb{R}^2 .

Para hallar una función v que sea armónica conjugada de u en \mathbb{R}^2 , por las ecuaciones de Cauchy–Riemann, debe ser $v_y(x, y) = u_x(x, y) = e^x \cos y$, por lo que $v(x, y) = \int e^x \cos y dy = e^x \sin y + c(x)$, en donde $c(x)$ representa una función de la variable x solamente (es decir, no puede depender de y). Dado que la otra ecuación de Cauchy–Riemann también debe satisfacerse, debe ser $v_x(x, y) = e^x \sin y + c'(x) = -u_y(x, y)$, es decir, debe cumplirse que $e^x \sin y + c'(x) = e^x \sin y$, por lo que $c'(x) = 0$, de donde deducimos que $c(x)$ tampoco puede depender de x . Entonces, $c(x)$ debe ser una constante real, por lo que cualquier armónica conjugada de u en \mathbb{R}^2 es de la forma $v(x, y) = e^x \sin y + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Concluimos también que, para cualquier $c \in \mathbb{R}$, la función $f(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + c)$ es analítica en todo el plano complejo (nótese que $f(z) = e^z + ic$). \square

Obsérvese que si $u(x, y)$ es armónica en D , también existe una función analítica en D cuya parte imaginaria es $u(x, y)$: por el teorema anterior, existe $v(x, y)$ tal que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D . Entonces, la función $g(z) = if(z) = -v(x, y) + iu(x, y)$ también es analítica en D (por ser el producto de dos funciones analíticas en ese dominio) y tiene a $u(x, y)$ como su parte imaginaria.

7.1. Curvas de nivel. Por si no ha quedado claro de los párrafos precedentes, resulta casi ilusorio pensar que si uno toma dos funciones reales cualesquiera $u(x, y)$ y $v(x, y)$ definidas en un dominio D , la correspondiente función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ vaya a ser analítica en D . Para empezar, u y v deben ser armónicas en D . Pero eso no alcanza: v debe ser también una armónica conjugada de u en D . Luego, u y v deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy–Riemann en D . Esto trae aparejado también una consecuencia geométrica para u y v , según veremos ahora.

Recordemos que si $u(x, y)$ es una función real de dos variables, la **curva de nivel de u correspondiente al valor $c \in \mathbb{R}$** es la curva en el plano cartesiano xy definida implícitamente por la expresión $u(x, y) = c$. Conforme c varía en \mathbb{R} , tendremos las distintas curvas de nivel que corresponden a u .

EJEMPLO 3.74. Para $u(x, y) = x^2 - y^2$, las curvas de nivel de u se obtienen de hacer variar el parámetro c en la expresión $x^2 - y^2 = c$.

- Para $c = 0$, obtenemos $|y| = |x|$. La curva de nivel de u corresponde entonces al par de rectas $y = x$ e $y = -x$.
- Para $c > 0$, la curva de nivel de u consiste en la hipérbola cuyo eje real es el eje x con asíntotas inclinadas dadas por $y = x$ e $y = -x$.
- Para $c < 0$, la curva de nivel de u es la hipérbola cuyo eje real es el eje y , con asíntotas oblicuas dadas también por $y = x$ e $y = -x$. \square

Demostraremos ahora que las curvas de nivel que corresponden a las partes real e imaginaria de una función que es analítica en un dominio D son **familias de curvas ortogonales en D** ,

es decir, toda vez que una curva de nivel de u se interseca con una de v en un punto de D , lo hace en ángulo recto (excepto tal vez en los puntos en que se anula la derivada de f).

TEOREMA 3.75. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en un dominio D . Sea \mathcal{C}_1 una curva de nivel de u y \mathcal{C}_2 una de v . Supongamos que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 se intersecan en $z_0 = (x_0, y_0) \in D$, y que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, la recta tangente a \mathcal{C}_1 en (x_0, y_0) es perpendicular a la recta tangente a \mathcal{C}_2 en ese mismo punto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 están definidas implícitamente por $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Designemos por r_1 a la recta tangente a \mathcal{C}_1 en (x_0, y_0) , y por r_2 a la recta tangente a \mathcal{C}_2 en (x_0, y_0) . Entonces, la ecuación de r_1 es $(x - x_0)u_x(x_0, y_0) + (y - y_0)u_y(x_0, y_0) = 0$, y la de r_2 es $(x - x_0)v_x(x_0, y_0) + (y - y_0)v_y(x_0, y_0) = 0$. Por ser f analítica en $z_0 = (x_0, y_0)$, tenemos que $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ y $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$. Por lo tanto, la ecuación para r_2 puede escribirse como $(x_0 - x)u_y(x_0, y_0) + (y - y_0)u_x(x_0, y_0) = 0$.

- Si $u_y(x_0, y_0) = 0$, debe ser $u_x(x_0, y_0) \neq 0$, pues hemos supuesto que $f'(z_0) \neq 0$, es decir, $u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \neq 0$. En consecuencia, r_1 es la recta vertical $x = x_0$ y r_2 es la recta horizontal $y = y_0$. Entonces, r_1 y r_2 son perpendiculares.
- Si $u_x(x_0, y_0) = 0$, debe ser $u_y(x_0, y_0) \neq 0$, y entonces r_1 es la recta horizontal $y = y_0$ y r_2 es la recta vertical $x = x_0$. También en este caso r_1 y r_2 son perpendiculares.
- Si $u_x(x_0, y_0) \neq 0$ y $u_y(x_0, y_0) \neq 0$, las respectivas ecuaciones para r_1 y r_2 pueden escribirse explícitamente como

$$y = -\frac{u_x(x_0, y_0)}{u_y(x_0, y_0)}x + \frac{u_x(x_0, y_0)}{u_y(x_0, y_0)}x_0 + y_0 \quad y = \frac{u_y(x_0, y_0)}{u_x(x_0, y_0)}x - \frac{u_y(x_0, y_0)}{u_x(x_0, y_0)}x_0 + y_0$$

Las pendientes son, respectivamente, $m_1 = -\frac{u_x(x_0, y_0)}{u_y(x_0, y_0)}$ y $m_2 = \frac{u_y(x_0, y_0)}{u_x(x_0, y_0)}$, que satisfacen el requisito de perpendicularidad $m_1 m_2 = -1$.

□

EJEMPLO 3.76. Consideremos la función entera $f(z) = z^2$. Sus partes real e imaginaria son, respectivamente, $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Las curvas de nivel de u se estudiaron en el ejemplo 3.74. Para las de v , consideramos $2xy = c$.

- Si $c = 0$, debe ser $x = 0$ o $y = 0$. Entonces, la curva de nivel de valor 0 para v es el par de ejes $x = 0$, $y = 0$.
- Si $c \neq 0$, se trata de la hipérbola $y = \frac{c}{2x}$, asíntota con los ejes coordenados. Si $c > 0$, la gráfica de la hipérbola se desarrolla en los cuadrantes primero y tercero, y para $c < 0$ la gráfica se desarrolla en los cuadrantes segundo y cuarto.

En la figura 1 se muestran algunas curvas de nivel de u y v , notándose la perpendicularidad de las mismas cuando se intersecan en puntos distintos del origen. En el origen no hay perpendicularidad, pero eso no es una contradicción al teorema anterior, pues $f'(0) = 0$. □

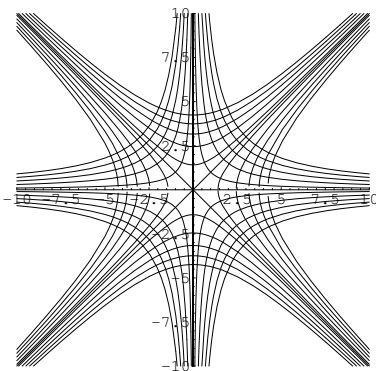


FIGURA 1

EJERCICIOS

1. Demostrar todas las propiedades generales de las funciones que se enuncian en la sección Preliminares: $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$, etc.
2. Considerar las siguientes funciones $f(z)$ con $z = x + iy$. Expresarlas como $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, indicando dominio de definición:
 - i) $f(z) = \frac{1}{|z|}$
 - ii) $f(z) = \frac{\bar{z}}{1+z}$
 - iii) $f(z) = (z - i)^2$
 - iv) $f(z) = \bar{z}^{-2} + i$
3. Verificar, por definición, que $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i+1}$
4. Mostrar que $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2+\bar{z}-2}{z-1}$ no existe, calculándolo a través de dos trayectorias distintas.
5. Mostrar que si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, entonces, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un entorno reducido de z_0 tal que para cualesquiera z_1, z_2 en ese entorno que pertenezcan al dominio de definición de f , se tiene que $|f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon$.
6. Sea S un conjunto conexo, y supongamos que f es una función continua en S que toma sólo valores enteros. Mostrar que f es constante en S .
7. Sea $f: K \subset \mathbb{C} \rightarrow T \subset \mathbb{C}$, con K compacto y f biyectiva y continua en K . Mostrar que f^{-1} es una función continua en T . Mostrar mediante un ejemplo que la compacidad de K es necesaria en este resultado.
8. Usando la definición, verificar que $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-i)^2} = \infty$, y que $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z+2i}{z^2+4} \neq \infty$.
9. Analizar para qué valores de $z = x + iy$ las siguientes funciones $f(z)$ tienen derivada, encontrando el valor de la misma.
 - i) $f(z) = \bar{z}$
 - ii) $f(x + iy) = x^2 - y^2 - 2xy + i(2xy + x^2 - y^2)$
 - iii) $f(z) = e^z$
 - iv) $f(z) = \frac{z^3 - \bar{z}}{z^2 + i}$
 - v) $f(z) = \sin z$
10. Mostrar la validez de la **Regla de L'Hôpital**:
Si f y g son funciones complejas diferenciables en z_0 , con $f(z_0) = 0 = g(z_0)$ y $g'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Usar esta regla para encontrar $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^9 + z - 2i}{z^{15} + i}$ y $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$.

11. Mostrar que la función $f(z) = x^2 + iy^2$ es derivable sólo si $y = x$, y, por lo tanto, no es analítica en ningún punto. Hallar el valor de la derivada en los puntos en los que existe.
12. Determinar en qué regiones del plano complejo son analíticas las siguientes funciones, y calcular su derivada en esos puntos:
 - i) $f(z) = 2z^2 + 3$
 - ii) $f(z) = z + z^{-1}$
 - iii) $f(x + iy) = -xy + \frac{i}{2}(x^2 - y^2)$
 - iv) $f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1}$
 - v) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re}(z)$
 - vi) $f(x + iy) = e^{x^2 - y^2} e^{2xyi}$
 - vii) $f(z) = \sinh z$
 - viii) $f(z) = \tan z$
 - ix) $f(z) = (3x^2 + 5y) + i(6xy - 5x)$
13. Demostrar que si $f(z)$ es analítica en z_0 y $g(z)$ no es analítica en z_0 , entonces $h(z) = f(z) + g(z)$ no es analítica en z_0 .
14. Encontrar los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera tal que la función $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ sea una función entera.
15. Hallar la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y con ella estudiar la analiticidad de las funciones $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $g(z) = z^n$ y $h(re^{i\theta}) = r \cos \theta + ir$.
16. Sea D un dominio en \mathbb{C} , y $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en D . Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
 - a) Mostrar que si $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces f es constante en D . (*Sugerencia*: Suponga que $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface que ϕ_x es idénticamente nula en D . Use el Teorema del Valor Medio para funciones reales de una variable real para demostrar que ϕ es constante sobre cualquier segmento horizontal contenido en D . Análogamente para los segmentos verticales cuando ϕ_y es idénticamente nula.

Concluir observando que para $z_1, z_2 \in D$, hay en D una poligonal desde z_1 hasta z_2 cuyos lados son segmentos horizontales o verticales.)

- b) Mostrar que si $\overline{f(z)}$ es analítica en D , entonces f es constante en D .
 - c) Mostrar que si u es constante en D , entonces f es constante en D .
 - d) Mostrar que si v es constante en D , entonces f es constante en D .
 - e) Mostrar que si $|f(z)|$ es constante en D , entonces f es constante en D .
17. Probar que si f es analítica en un dominio D , entonces se tiene que, en D ,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2$$

18. Para cada una de las siguientes funciones $u(x, y)$, determine el mayor dominio D en que son armónicas. Encontrar su armónica conjugada en D , y una función de variable compleja $f(z)$ analítica en D tal que $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y)$:
- a) $u(x, y) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1$
 - b) $u(x, y) = e^x \cos y$
 - c) $u(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$
 - d) $u(x, y) = 2x(1 - y)$
 - e) $u(x, y) = \frac{x-4}{x^2+y^2-8x+16}$
19. Determinar los valores de z para los cuales la función $u(x, y) = x^4 - y^3$ satisface la ecuación de Laplace. ¿Es u armónica en algún dominio?
20. Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son dos funciones armónicas, comprobar que $u + v$ debe ser una función armónica, pero que uv no es necesariamente armónica.
21. Muestre que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D , entonces uv es armónica en D , mientras que u^2 no lo es, a menos que u sea constante.
22. Considerar la función $f(z) = z^3 = u + iv$.
- a) Obtener la ecuación de la curva sobre la cual $u = 1$ en el plano xy . Repetir el cálculo para $v = 1$. Trazar ambas curvas en el primer cuadrante.
 - b) Determinar analíticamente el punto de intersección (a, b) de dichas curvas en el primer cuadrante. (*Sugerencia:* considerar $z = r \operatorname{cis} \theta$ y encontrar la intersección en coordenadas polares).
 - c) Calcular las pendientes de ambas curvas en el punto de intersección (a, b) , y comprobar la ortogonalidad.
23. Mostrar que las curvas de nivel de las partes real e imaginaria de $f(z) = 1/z$ son círculos ortogonales que contienen al origen y con centros en el eje real e imaginario respectivamente.
24. Delinear las curvas de nivel correspondientes a las partes real e imaginaria de $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$

INTEGRACIÓN

En el primer curso de Cálculo, se aprendió el concepto de integral indefinida y definida de funciones reales de variable real, y se dedujeron varias propiedades de las mismas: linealidad, monotonía, condiciones de existencia, etc. Nuestro objetivo de este capítulo es extender esas ideas al campo de los números complejos. De las múltiples maneras en que esto puede hacerse, elegimos la que parece ser más natural a partir de lo que ya conocemos: primero aprenderemos a integrar ciertas especiales funciones complejas usando integrales de funciones de variable real, para luego aprender a integrar funciones complejas en general, cuando sea posible.

En el análisis que nos proponemos, los conceptos de *curva continua* y de *contorno* resultan relevantes, por lo que nuestra primera ocupación ahora será formalizarlos.

1. Curvas y contornos en el plano complejo

Cualquier función z de un intervalo real $[a, b]$ en \mathbb{C} es una **función compleja de variable real** (FCVR). A un número t del intervalo, z le hará corresponder un número complejo $z(t) = x(t) + iy(t)$, en donde $x(t)$ e $y(t)$ son números reales que en general dependerán de t , como lo indica la notación utilizada. En los puntos de $[a, b]$ en que $x(t)$ e $y(t)$ son ambas derivables, se define la **derivada** de $z(t)$ como $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ (en a se exige la existencia de la derivada lateral derecha, y en b la de la izquierda).

Notar que $z(t)$ puede verse como una función $z : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donde $D = \{(t, 0) : a \leq t \leq b\} \subset \mathbb{C}$, y las funciones de parte real e imaginaria son, respectivamente, $x(t)$ e $y(t)$. Por lo tanto, $z(t)$ es continua en t_0 si, y sólo si, $x(t)$ e $y(t)$ son también continuas (como funciones reales de una variable real) en t_0 .

Bajo ciertas condiciones, la imagen de $[a, b]$ por z es una curva \mathcal{C} en el plano complejo, que puede imaginarse como generada desde $z(a)$ hasta $z(b)$ a medida que t va creciendo de a a b . Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 4.1. Una **curva continua** es una función continua z cuyo dominio es algún intervalo cerrado $[a, b]$ y cuyo codominio es \mathbb{C} ; $z(a)$ y $z(b)$ se llaman, respectivamente, **punto inicial** y **punto final** de la curva, y se dice que **la curva va desde $z(a)$ hasta $z(b)$** . Una **curva suave**, o **curva regular**, es una curva continua cuya derivada z' es continua y no nula en $[a, b]$. Una curva continua se llama **suave a trozos**, o **curva regular a trozos**, o **contorno**, si hay una partición finita $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$ tal que la restricción de z a cada subintervalo $[t_j, t_{j+1}]$ es una curva suave. Un contorno se dice **cerrado** si $z(b) = z(a)$.

Haremos referencia a los contornos indistintamente a través del lugar geométrico que describen (“el contorno \mathcal{C} ”, con la consideración implícita del sentido de su recorrido) o a través de la expresión que los define (“el contorno $z(t)$, $a \leq t \leq b$ ”). La expresión $z(t)$, con $a \leq t \leq b$, se denomina una *parametrización* de \mathcal{C} .

Gráficamente hablando, una curva suave es un trazado continuo con vector tangente $z'(t)$ bien definido en cada punto, y que además va girando en forma continua. Un contorno es un número finito de curvas suaves concatenadas sucesivamente por los extremos. En los puntos de unión, puede haber “vértices”, es decir, puntos angulares, en los que puede no estar definido $z'(t)$, pero son sólo una cantidad finita, y en ellos $\operatorname{Re}(z'(t))$ e $\operatorname{Im}(z'(t))$ pueden presentar una discontinuidad con salto finito. Un contorno cerrado tiene punto final igual a su punto inicial.

Notar que, siendo z continua y $[a, b]$ compacto en \mathbb{C} , un contorno es un subconjunto compacto de \mathbb{C} (teor. 3.36), y esto, en particular, quiere decir que todo contorno es un subconjunto acotado y conexo de \mathbb{C} .

Como dijimos, \mathcal{C} puede imaginarse como trazado desde el punto $z(a)$ al $z(b)$ a medida que t crece de a a b . Muchas veces, interesará obtener el mismo contorno, pero trazado desde $z(b)$ hasta $z(a)$. Técnicamente, es un contorno distinto (aún cuando el lugar geométrico de puntos es el mismo), y se denomina “contorno inverso de \mathcal{C} ”, denotado por $-\mathcal{C}$. Si $z(t)$ con $a \leq t \leq b$ representa a \mathcal{C} , entonces definimos $-\mathcal{C}$ mediante la parametrización dada por $w(t) = z(-t)$ con $-b \leq t \leq -a$.

EJEMPLO 4.2. Consideremos las siguientes curvas:

- $z_1(t) = 2 \cos t + 2i \sin t = 2e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$
- $z_2(t) = 2 \cos(t-1) + 2i \sin(t-1) = 2e^{i(t-1)}$ con $1 \leq t \leq 1+\pi$
- $z_3(t) = 2 \cos(t/2) + 2i \sin(t/2) = 2e^{i(t/2)}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$
- $z_4(t) = 2 \cos t + 2i \sin t = 2e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$
- $z_5(t) = 2 \cos t + 2i \sin t = 2e^{it}$ con $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi$
- $z_6(t) = 2 \cos t + 2i \sin t = 2e^{it}$ con $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} + 4\pi$
- $z_7(t) = t + 2it = t(1 + 2i)$ con $0 \leq t \leq 1$

$z_1(t)$ corresponde al arco de circunferencia con centro en el origen y radio 2, trazado desde el complejo 2 hasta el complejo -2 en sentido antihorario.

$z_2(t)$ y $z_3(t)$ corresponden a la misma curva que $z_1(t)$.

$z_4(t)$ corresponde a la circunferencia completa con centro en el origen y radio 2, trazada desde el complejo 2 hasta sí mismo en sentido antihorario.

$z_5(t)$ corresponde a la circunferencia completa con centro en el origen y radio 2, trazada desde el complejo $2i$ hasta sí mismo en sentido antihorario. $z_6(t)$ corresponde a la misma circunferencia que $z_5(t)$, pero trazada dos veces, y por ello es una curva distinta que $z_5(t)$.

$z_7(t)$ corresponde al segmento desde 0 hasta $1 + 2i$.

Observar que $z_1(t)$, $z_2(t)$ y $z_3(t)$ corresponden a la misma curva, mientras que $z_4(t)$, $z_5(t)$ y $z_6(t)$, a pesar de describir las tres un mismo lugar geométrico, corresponden a curvas distintas entre sí. \square

Como vemos, dos funciones distintas $z(t)$ ($a \leq t \leq b$) y $w(t)$ ($c \leq t \leq d$) pueden representar un mismo contorno. Formalizaremos esa idea diciendo que $z(t)$ y $w(t)$ **representan el mismo contorno**, o que $z(t)$ y $w(t)$ **son equivalentes**, si existe una función continua biyectiva g del intervalo $[a, b]$ en el intervalo $[c, d]$ tal que $g(a) = c$, $g(b) = d$ y $z = w \circ g$. En el ejemplo anterior, para ver que las expresiones de los dos primeros incisos corresponden a un mismo contorno, basta tomar $g(t) = t + 1$.

Queda como ejercicio mostrar que si \mathcal{C} es un contorno, entonces admite una parametrización $z(t)$, $a \leq t \leq b$, con $a < b$ elegidos a voluntad.

1.1. Poligonales inscriptas en contornos. Supongamos que \mathcal{C} es un contorno con parametrización dada por la función continua $z(t)$, $a \leq t \leq b$. Consideremos una partición \mathcal{P} del intervalo $[a, b]$, es decir, $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ con $a = t_0$, $b = t_n$ y $t_k < t_{k+1}$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Designemos a la norma de la partición mediante $\|\mathcal{P}\| = \max\{t_{k+1} - t_k : k = 0, 1, \dots, n-1\}$, y hagamos $z_k = z(t_k)$ para cada $k = 0, 1, \dots, n$. Tenemos que cada z_k es un punto de \mathcal{C} , por lo que los puntos z_0, z_1, \dots, z_n determinan una poligonal $P = [z_0, z_1, \dots, z_n]$ desde el punto inicial hasta el punto final de \mathcal{C} que además tiene todos sus vértices intermedios en \mathcal{C} . Se dice entonces que P es la **poligonal inscripta en \mathcal{C} inducida por \mathcal{P}** . Observar que si \mathcal{C} es un contorno cerrado, la poligonal corresponde a un **polígono inscripto** en el contorno.

Una parametrización para el segmento $[z_k, z_{k+1}]$ de P está dada por la expresión

$$p_k(t) = z_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}(z_{k+1} - z_k)$$

con parámetro t tal que $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. De este modo, una parametrización para P es dada por $p(t)$, $a \leq t \leq b$, con $p(t) = p_k(t)$ para $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Como es de esperarse, cuanto más fina es una partición (es decir, cuanto más pequeña es su norma), más ceñida es la poligonal P al contorno \mathcal{C} .

PROPOSICIÓN 4.3. *Sea \mathcal{C} un contorno con parametrización $z(t)$, $a \leq t \leq b$, y sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que si \mathcal{P} es una partición con norma menor que δ , entonces \mathcal{P} induce una poligonal P con parametrización $p(t)$, $a \leq t \leq b$, tal que para todo $t \in [a, b]$, $|p(t) - z(t)| < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que z es continua y $[a, b]$ compacto, z es uniformemente continua en $[a, b]$ (prop. 3.43), por lo que $\exists \delta > 0 : \forall t, t' \in [a, b], |t - t'| < \delta \Rightarrow |z(t) - z(t')| < \varepsilon/2$. Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $\|\mathcal{P}\| < \delta$, y sea P la poligonal inducida por \mathcal{P} , con parametrización $p(t)$ según se enunció previamente. Tomemos $t \in [a, b]$. Existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Se tiene entonces que $0 \leq t - t_k \leq t_{k+1} - t_k < \delta$, por lo que

$$0 \leq \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \leq 1 \quad |z(t) - z(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |z(t_{k+1}) - z(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde

$$\begin{aligned} |p(t) - z(t)| &= \left| z_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} (z_{k+1} - z_k) - z(t) \right| \\ &\leq |z(t_k) - z(t)| + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} |z(t_{k+1}) - z(t_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Supongamos que \mathcal{C} es además subconjunto de algún abierto D . Cabe preguntarse si una poligonal inscrita en \mathcal{C} es también subconjunto de D . Como la intuición ya nos podría estar indicando en base al resultado anterior, si la partición es suficientemente fina, eso efectivamente ocurre.

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea \mathcal{C} un contorno en un conjunto abierto D . Existe $\delta > 0$ tal que toda partición del intervalo de variación del parámetro de \mathcal{C} con norma menor que δ induce una poligonal inscrita en \mathcal{C} que está contenida en D .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z(t)$, $a \leq t \leq b$, una parametrización para \mathcal{C} . Siendo \mathcal{C} compacto, D^c cerrado y $\mathcal{C} \cap D^c = \emptyset$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall z \in \mathcal{C}, w \in D^c, |z - w| \geq \varepsilon$ (prop. 2.31). Notar que, en consecuencia, $\forall z \in \mathcal{C}, B_\varepsilon(z) \subset D$. Apelando a la prop. 4.3, sea $\delta > 0$ tal que cualquier partición \mathcal{P} de $[a, b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ induce una poligonal con parametrización $p(t)$, con $a \leq t \leq b$, tal que $|z(t) - p(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a, b]$. Sea \mathcal{P} cualquiera de tales particiones, y P la poligonal inscrita en \mathcal{C} que ésta induce. Si $w \in P$, es $w = p(t)$ para algún $t \in [a, b]$; como $|z(t) - p(t)| < \varepsilon$, y $z(t)$ es un punto de \mathcal{C} , es $w \in B_\varepsilon(z(t)) \subset D$. Siendo w arbitrario en P , tenemos que $P \subset D$. □

2. Integral de funciones complejas de variable real

Sea $z(t)$, con $a \leq t \leq b$, una FCVR. Se define su integral mediante:

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(z(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(z(t)) dt$$

siempre que las dos integrales que aparecen a la derecha existan, en cuyo caso diremos que $z(t)$ **es integrable** en el intervalo $[a, b]$. En particular, si $z(t)$ es continua (excepto en, a lo sumo, una cantidad finita de puntos del intervalo donde haya discontinuidades con salto finito), también lo serán $\operatorname{Re}(z(t))$ e $\operatorname{Im}(z(t))$, y existirá la integral.

Para $z(t)$ y $w(t)$ ($a \leq t \leq b$) FCVR integrables, c real entre a y b , y k constante compleja, algunas propiedades básicas de las integrales, que se deducen a partir de la definición dada y de propiedades conocidas para integrales de funciones reales, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_a^b (z(t) + w(t)) dt = \int_a^b z(t) dt + \int_a^b w(t) dt & (2) \quad & \int_a^b kz(t) dt = k \int_a^b z(t) dt \\
 (3) \quad & \int_a^b z(t) dt = - \int_b^a z(t) dt & (4) \quad & \int_a^b z(t) dt = \int_a^c z(t) dt + \int_c^b z(t) dt \\
 (5) \quad & \left| \int_a^b z(t) dt \right| \leq \int_a^b |z(t)| dt \\
 (6) \quad & \text{Si } z(t) \text{ es una curva suave, entonces la longitud de la misma es } L = \int_a^b |z'(t)| dt
 \end{aligned}$$

Las cuatro primeras quedan de ejercicio. Para (5), si $\int_a^b z(t) dt = 0$ la aseveración es inmediatamente verdadera; y si $\int_a^b z(t) dt \neq 0$, sea $\int_a^b z(t) dt = r_0 e^{i\theta_0}$ con $r_0 > 0$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$r_0 = \frac{1}{e^{i\theta_0}} \int_a^b z(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} z(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} z(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(e^{-i\theta_0} z(t)) dt$$

y siendo el último miembro igual al real r_0 , debe ser $\int_a^b \operatorname{Im}(e^{-i\theta_0} z(t)) dt = 0$. Luego,

$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} z(t)) dt \leq \int_a^b |\operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} z(t))| dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta_0} z(t)| dt = \int_a^b |z(t)| dt$$

es decir, $\left| \int_a^b z(t) dt \right| \leq \int_a^b |z(t)| dt$.

Para (6), supongamos $z(t) = x(t) + iy(t)$. De la definición de derivada, será $|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ que corresponde a la longitud de un arco elemental de curva, según lo aprendido en Cálculo para curvas expresadas paramétricamente. Integrando, se tiene el resultado.

El Teorema Fundamental del Cálculo para funciones reales de variable real enuncia que si f es función real derivable en $[a, b]$ y f' es integrable en ese intervalo, entonces $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$. Usando ese resultado, obtenemos la extensión del mismo a las FCVR que tienen partes real e imaginaria integrables.

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea $z(t)$, con $a \leq t \leq b$, una función compleja de variable real tal que z' es integrable en $[a, b]$. Entonces $\int_a^b z'(t) dt = z(b) - z(a)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $z(t) = x(t) + iy(t)$. Entonces, por definición de integral y por nuestros comentarios previos,

$$\int_a^b z'(t) dt = \int_a^b x'(t) dt + i \int_a^b y'(t) dt = x(b) - x(a) + i(y(b) - y(a)) = z(b) - z(a)$$

□

3. Integral de funciones de variable compleja sobre contornos

Sea \mathcal{C} un contorno con parametrización $z(t)$, $a \leq t \leq b$, y $f(z)$ una función de variable compleja definida y continua sobre cada punto de \mathcal{C} . Se define la **integral de $f(z)$ a lo largo de \mathcal{C}** mediante:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

La integral de la derecha es la integral de una FCVR y está bien definida pues $f \circ z$ es continua en $[a, b]$; por ser $z(t)$ un contorno, $z'(t)$ también será continua salvo posiblemente en una cantidad finita de puntos (los puntos angulares del contorno) en donde puede haber discontinuidades con salto finito; ya que el producto de funciones continuas es una función continua, el integrando es

una función continua salvo en un número finito de puntos (en los que no hay saltos infinitos), por lo que la integral existe.

Se puede demostrar que el valor de la integral es independiente de la parametrización elegida para \mathcal{C} (ejercicio).

Veremos, a continuación, ejemplos de cálculo de integrales a través de la definición, algunos de los cuales, a su vez, ilustran diversas situaciones de interés que pueden presentarse.

EJEMPLO 4.6. Calculemos $\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz$ y $\int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$ cuando $f(z) = \bar{z}$, \mathcal{C}_1 es el segmento recto desde 0 hasta $1+i$ y \mathcal{C}_2 es el arco de la parábola $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)^2$ desde 0 hasta $1+i$.

Para la primera integral, como no conocemos una expresión para la curva, nuestro primer trabajo es encontrar una. Para eso, viendo al segmento en cuestión como subconjunto de \mathbb{R}^2 , corresponde a la recta $y = x$ con x variando entre 0 y 1. De allí que una posible forma de representar paramétricamente a la curva es tomando $x(t) = t$, $y(t) = t$ con $0 \leq t \leq 1$. Es decir, $z(t) = t + it$, por lo que $z'(t) = 1 + i$. Entonces $f(z(t)) = \bar{z(t)} = t - it = t(1 - i)$ y $z'(t) = 1 + i$. Por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_0^1 t(1-i)(1+i)dt = (1-i)(1+i)\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-i^2) = 1$$

Para la integral sobre \mathcal{C}_2 , consideramos la parametrización del contorno dada por $z(t) = t + it^2$ con $0 \leq t \leq 1$. Por lo tanto, $z'(t) = 1 + 2it$, y entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz &= \int_0^1 t(1-i)(1+2it)dt = (1-i) \left(\int_0^1 tdt + 2i \int_0^1 t^2dt \right) \\ &= (1-i) \left(\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 + \frac{2i}{3}t^3\Big|_0^1 \right) = (1-i) \left(\frac{1}{2} + \frac{2i}{3} \right) = \frac{7}{6} + \frac{1}{6}i \end{aligned}$$

□

En el ejemplo anterior, notar que $\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz \neq \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$ aún cuando el integrando es el mismo y los dos contornos van desde el mismo punto inicial hasta el mismo punto final. Queda claro entonces que, en general, el valor de la integral depende también de los valores que toma el integrando en los puntos intermedios del contorno. Sin embargo, hay casos en los que el valor de la integral depende sólo de los puntos inicial y final, como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.7. Veamos que si z_1 y z_2 son complejos cualesquiera y \mathcal{C} es cualquier curva suave desde z_1 hasta z_2 , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} dz &= z_2 - z_1 \\ \int_{\mathcal{C}} z dz &= \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}z_1^2 \end{aligned}$$

(Notar que, en particular, si la curva es cerrada, las dos integrales valen 0.)

Supongamos que \mathcal{C} tiene parametrización $z(t)$, $a \leq t \leq b$, con $z(a) = z_1$ y $z(b) = z_2$.

Para la primera integral, el integrando es $f(z) = 1$, por lo que $f(z(t)) = 1$ para todo $t \in [a, b]$. Por corresponder $z(t)$ a una curva suave, tiene derivada $z'(t)$ cuyas partes real e imaginaria son continuas, y por lo tanto son ambas integrables. Luego, por la proposición 4.5, resulta

$$\int_{\mathcal{C}} dz = \int_a^b z'(t)dt = z(b) - z(a) = z_2 - z_1$$

Para la segunda integral, el integrando es $f(z) = z$, por lo que $f(z(t)) = z(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Entonces $f(z(t))z'(t) = z(t)z'(t)$, cuyas partes real e imaginaria son ambas integrables. Sea $z(t) = x(t) + iy(t)$; por ser $z(t)$ la parametrización de una curva suave, $x(t)$ e $y(t)$ son ambas derivables. Tomando

$$F(t) = \frac{1}{2}z(t)^2 = \frac{x(t)^2 - y(t)^2}{2} + ix(t)y(t)$$

resulta

$$F'(t) = x(t)x'(t) - y(t)y'(t) + i(x'(t)y(t) + x(t)y'(t)) = z(t)z'(t)$$

Luego, por la proposición 4.5,

$$\int_{\mathcal{C}} z dz = \int_a^b z(t)z'(t)dt = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}z_1^2$$

□

El ejemplo anterior muestra que para las funciones $f(z) = 1$ y $f(z) = z$, la integral de cualquiera de ellas sobre cualquier curva suave cerrada vale 0. Esto no es cierto en general, aún cuando el integrando sea una función analítica en cada punto del contorno de integración.

EJEMPLO 4.8. Sea z_0 cualquier número complejo, y \mathcal{C} cualquier circunferencia con centro z_0 recorrida una vez en sentido positivo. Entonces, $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$.

Para verlo, llamemos r al radio de \mathcal{C} . Una parametrización para el contorno de integración es $z(t) = z_0 + r \cos t + ir \sin t$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, teniéndose que $z'(t) = -r \sin t + ir \cos t = i(ir \sin t + r \cos t) = i(z(t) - z_0)$. Luego,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t) - z_0} i(z(t) - z_0) dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

□

3.1. La integral compleja y las integrales de línea de funciones reales de dos variables. Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y que \mathcal{C} tiene expresión paramétrica $z(t) = x(t) + iy(t)$ con $a \leq t \leq b$. Haciendo el producto $f(z(t))z'(t)$, y aplicando la definición de integral, vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b \left(u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) + \right. \\ &\quad \left. iu(x(t), y(t))y'(t) + iv(x(t), y(t))x'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)) dt + \\ &\quad i \int_a^b (u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)) dt \\ &= \int_{\mathcal{C}} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_{\mathcal{C}} (v(x, y)dx + u(x, y)dy) \end{aligned}$$

en donde las últimas integrales son las conocidas integrales de línea de funciones reales de dos variables reales. Una manera fácil de recordar esta última fórmula es expresar a f como $u + iv$, a dz como $dx + idy$, y desarrollar el producto.

3.2. La integral como límite de sumas. Una partición finita $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$ induce una partición del contorno \mathcal{C} en arcos $z_0z_1, z_1z_2, \dots, z_{n-1}z_n$ en donde $z_k = z(t_k)$. Si para cada subintervalo de la partición se elige η_k cumpliendo $t_k \leq \eta_k \leq t_{k+1}$, se obtiene un punto $\xi_k = z(\eta_k)$ de la porción del contorno entre z_k y z_{k+1} , y llamando $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ para $0 \leq k \leq n-1$, podemos calcular $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k$. Es factible mostrar, a partir de la definición, que si la norma de la partición es suficientemente pequeña, esta suma difiere en módulo del valor de la integral en cantidades arbitrariamente pequeñas, independientemente de la elección de η_k en el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda partición de $[a, b]$ con norma menor que δ produce

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz - \sum_{k=0}^{n-1} f(z(\eta_k)) (z(t_{k+1}) - z(t_k)) \right| < \varepsilon \quad (\mathbf{A})$$

para cualquier elección de cada η_k en el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. Para verlo, basta recordar la propiedad análoga de las integrales de línea: sea $u(x, y)$ una función real de dos variables, y sea \mathcal{C} un contorno de su dominio, con parametrización $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Supongamos que existe $I = \int_{\mathcal{C}} u(x, y) dx$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier partición $\{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ y cualquier selección $\{\eta_0, \dots, \eta_{n-1}\}$ con $t_k \leq \eta_k \leq t_{k+1}$, $k = 0, \dots, n-1$, se tiene que

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} u(x(\eta_k), y(\eta_k)) (x(t_{k+1}) - x(t_k)) \right| < \varepsilon$$

Usando esta propiedad y la expresión que relaciona la integral compleja con las integrales de línea de funciones reales de dos variables, se obtiene la propiedad mencionada en **(A)** (ejercicio).

3.3. Propiedades de la integral. Desigualdad ML. Algunas propiedades que pueden deducirse directamente de la definición de integral y de las ya deducidas propiedades de integrales de FCVR son las siguientes, en donde $f(z)$ y $g(z)$ son funciones complejas, k es una constante compleja y \mathcal{C} es un contorno expresado por $z(t)$, con $a \leq t \leq b$:

1. $\int_{\mathcal{C}} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}} g(z) dz$
2. $\int_{\mathcal{C}} k f(z) dz = k \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$
3. $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = - \int_{-\mathcal{C}} f(z) dz$
4. Si \mathcal{C} es la concatenación de las curvas suaves $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{C}_k} f(z) dz$$

y, en consecuencia, la integral de una función sobre una concatenación de contornos es la suma de las integrales de esa función sobre los contornos individuales.

Para ver la primera:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} (f(z) + g(z)) dz &= \int_a^b (f + g)(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b (f(z(t)) z'(t) + g(z(t)) z'(t)) dt \\ &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt + \int_a^b g(z(t)) z'(t) dt = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}} g(z) dz \end{aligned}$$

La segunda es por el estilo.

Para la tercera, siendo $z(t) = x(t) + iy(t)$ (con $a \leq t \leq b$) una parametrización de \mathcal{C} , una parametrización para $-\mathcal{C}$ es $w(t) = x_1(t) + iy_1(t)$ con $x_1(t) = x(-t)$, $y_1(t) = y(-t)$ y $-b \leq t \leq -a$. Podemos ver que $w'(t) = -z'(-t)$ pues $x_1'(t) = -x'(-t)$ e $y_1'(t) = -y'(-t)$. Por lo tanto, considerando el cambio de variable $t = -u$ (y consecuentemente $dt = -du$),

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_{-a}^{-b} f(z(-u)) (-z'(-u)) du \\ &= \int_{-a}^{-b} f(w(u)) (w'(u)) du = - \int_{-b}^{-a} f(w(u)) (w'(u)) du = - \int_{-\mathcal{C}} f(z) dz \end{aligned}$$

Veamos la cuarta, para el caso $n = 2$ (el caso general es análogo). Si \mathcal{C}_1 está dada por $z_1(t)$ con $a \leq t \leq c$, podemos obtener una parametrización $z_2(t)$ para \mathcal{C}_2 con $c \leq t \leq b$. Definamos entonces, para $a \leq t \leq b$,

$$z(t) = \begin{cases} z_1(t) & \text{si } t \leq c \\ z_2(t) & \text{si } t > c \end{cases}$$

Dicha expresión es una parametrización para \mathcal{C} , siendo

$$z'(t) = \begin{cases} z'_1(t) & \text{si } t < c \\ z'_2(t) & \text{si } t > c \end{cases}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^c f(z(t)) z'(t) dt + \int_c^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^c f(z_1(t)) z'_1(t) dt + \int_c^b f(z_2(t)) z'_2(t) dt = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz \end{aligned}$$

Una importantísima cota para el módulo de una integral es la que sale del siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4.9. *Sea \mathcal{C} un contorno de longitud L , y $f(z)$ una función continua definida en un dominio que contiene a la curva. Sea M un real tal que para todo $z \in \mathcal{C}$ es $|f(z)| \leq M$, entonces*

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq ML$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $z(t)$, $a \leq t \leq b$, una parametrización para \mathcal{C} .

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt \leq \int_a^b M |z'(t)| dt = ML$$

en donde hemos usado propiedades de integrales de FCVR ya demostradas. \square

La desigualdad dada en la proposición anterior se conoce, por razones obvias, como “desigualdad ML”, y será usada a menudo en el resto del curso. La existencia del real M está garantizada, pues siendo \mathcal{C} un subconjunto compacto de \mathbb{C} y $|f|$ una función continua a valores reales, debe haber un punto z sobre \mathcal{C} en el que $|f(z)|$ alcanza un máximo (corolario 3.38).

3.4. Primitivas. El Teorema Fundamental del Cálculo. En el ejemplo 4.7 se muestra que para las funciones $f(z) = 1$ y $f(z) = z$, las integrales sobre cualquier curva suave dependen sólo del punto inicial y del punto final de la curva. Como la integral de una función sobre un contorno es la suma de las integrales de esa función sobre las curvas suaves que componen ese contorno, se sigue que

$$\int_{\mathcal{C}} dz = z_2 - z_1 \qquad \int_{\mathcal{C}} z dz = \frac{1}{2} z_2^2 - \frac{1}{2} z_1^2$$

cualquiera sea el contorno \mathcal{C} con punto inicial z_1 y punto final z_2 . Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.10. Sea D un dominio, y f una función compleja continua en D . Sean z_1 y z_2 dos puntos de D . Decimos que la integral de $f(z)$ es **independiente del camino desde z_1 hasta z_2** si para cualquier par de contornos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 en D que van de z_1 a z_2 , es $\int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz$, y ese único valor que tienen las integrales sobre todos los contornos que van de z_1 hasta z_2 se simboliza por $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$. Decimos que la integral de $f(z)$ es **independiente del camino en D** si la integral es independiente del camino entre dos puntos cualesquiera de D .

DEFINICIÓN 4.11. Sea D un dominio, y f una función definida en él. Una **primitiva para f en D** es una función F definida en D tal que para todo $z \in D$, es $F'(z) = f(z)$.

Observar que, siendo D abierto, una primitiva de f en D es entonces una función analítica en D .

Resulta natural preguntarse cuándo una función definida en algún dominio posee una primitiva. El Teorema Fundamental del Cálculo para funciones de variable compleja, que vemos a continuación, establece una condición suficiente.

TEOREMA 4.12. (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea D un dominio, y $f(z)$ una función continua en D tal que sus integrales sean independientes del camino en D . Sea z_0 un punto de D , y hagamos $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$. Entonces, $F(z)$ es analítica en D , y $F'(z) = f(z)$.*

DEMOSTRACIÓN. Mostraremos que para cualquier $z \in D$, $\lim_{w \rightarrow z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z}$ existe y vale $f(z)$, con lo que tendremos el resultado.

Sea entonces z un punto cualquiera de D , y $\varepsilon > 0$. Por ser z un punto interior a D , existe $\delta_1 > 0$ tal que el círculo con centro z y radio δ_1 está contenido en D . Como por hipótesis es f continua en z , hay un $\delta_2 > 0$ tal que para todo w con $|w - z| < \delta_2$, es $|f(w) - f(z)| < \varepsilon/2$. Hagamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y tomemos w que cumpla $0 < |w - z| < \delta$. Sea \mathcal{C} un contorno de z_0 a z en D , \mathcal{C}_1 el segmento recto desde z hasta w y \mathcal{C}_2 la concatenación de \mathcal{C} con \mathcal{C}_1 . Notar que \mathcal{C}_2 es un camino de z_0 a w contenido en D . Entonces, por la hipótesis de que la integral es independiente del camino,

$$F(w) = \int_{z_0}^w f(\zeta) d\zeta = \int_{\mathcal{C}_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta + \int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta) d\zeta = F(z) + \int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta) d\zeta$$

por lo que $\frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \frac{1}{w - z} \int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta) d\zeta$. Además, el ejemplo 4.7 muestra que $\int_{\mathcal{C}_1} d\zeta = w - z$, por lo que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{w - z} \int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta) d\zeta - f(z) \frac{w - z}{w - z} \right| \\ &= \left| \frac{1}{w - z} \left(\int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta) d\zeta - (w - z) f(z) \right) \right| \\ &= \frac{1}{|w - z|} \left| \int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta) d\zeta - f(z) \int_{\mathcal{C}_1} d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{|w - z|} \left| \int_{\mathcal{C}_1} f(\zeta) d\zeta - \int_{\mathcal{C}_1} f(z) d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{|w - z|} \left| \int_{\mathcal{C}_1} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq \frac{1}{|w - z|} \frac{\varepsilon}{2} |w - z| < \varepsilon \end{aligned}$$

pues cada punto sobre \mathcal{C}_1 está a distancia menor que δ de z . □

4. Integración sobre contornos cerrados

Nos proponemos ahora investigar las propiedades de la integración cuando el contorno \mathcal{C} es cerrado, es decir, con parametrización dada por la expresión $z(t)$ con $a \leq t \leq b$ y $z(b) = z(a)$. Decimos que \mathcal{C} es un **contorno cerrado simple** (también llamado **curva de Jordan**) si además de ser cerrado se cumple que, para todos $t, t' \in [a, b]$, $t \neq t' \Rightarrow z(t) \neq z(t')$.

En términos gráficos, un contorno cerrado simple no se interseca a sí mismo, salvo por el hecho de que su punto final coincide con su punto inicial.

El **Teorema de las curvas de Jordan** establece que todo contorno cerrado simple \mathcal{C} es la frontera de dos dominios disjuntos, uno de ellos acotado (el **interior de \mathcal{C}** , denotado por $\text{int}(\mathcal{C})$) y el otro no acotado. La unión de estos dos dominios con el contorno es el plano completo.

Un dominio D se dice **simplemente conexo** si para cualquier contorno cerrado simple \mathcal{C} contenido en D se verifica que $\text{int}(\mathcal{C}) \subset D$. Intuitivamente, un dominio es simplemente conexo si no posee agujeros. Por ejemplo, el interior de un disco es un dominio simplemente conexo, mientras que el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ es un dominio, pero no es simplemente conexo.

Hay dos maneras de dar una vuelta completa sobre un contorno cerrado simple. En una de ellas, una persona que viaja sobre la curva tiene al interior del contorno siempre hacia su izquierda; llamaremos **positiva** o **antihoraria** a esta manera de recorrer la curva, y **negativa** u **horaria** a la manera opuesta. Para calcular una integral sobre un contorno cerrado simple, es preciso tener presente en cuál de las dos orientaciones estamos recorriendo la curva, para hacer

la parametrización correspondiente. Si no se hace una especificación explícita, convendremos en considerar que el contorno debe considerarse positivamente orientado.

Deben haber sido numerosos los ejemplos que desarrolló Cauchy para darse cuenta, allá por 1814, de que la integral de una función analítica en un dominio simplemente conexo sobre un contorno cerrado simple de ese dominio da 0. Cauchy pudo demostrar eso haciendo la suposición de que la derivada del integrando es también continua en el dominio. Ese es el contenido del Teorema de Cauchy. Hacia fines del siglo XIX, Goursat, que nació después de muerto Cauchy, se dio cuenta de que la suposición de la continuidad era innecesaria, y logró demostrar el teorema para contornos cerrados no necesariamente simples, y sin la suposición (tuvo que transpirar mucho más, como es de imaginarse). Este último teorema se conoce como Teorema de Cauchy-Goursat. Nos encaminamos a la demostración de ambos.

4.1. El teorema de Cauchy. La demostración es realmente simple, si se tienen a la vista el Teorema de Green en el plano y las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Estas últimas son viejas conocidas nuestras, de modo que sólo recordaremos el enunciado del Teorema de Green: Sea \mathcal{C} un contorno cerrado y simple, y R la región determinada por la unión de \mathcal{C} con sus puntos interiores; sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ dos funciones reales de dos variables reales continuas con derivadas parciales de primer orden continuas en R . Entonces,

$$\oint_{\mathcal{C}} (Pdx + Qdy) = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy$$

cuando \mathcal{C} se recorre en sentido positivo.

Con ésto, veamos el enunciado formal del Teorema de Cauchy, y su demostración.

TEOREMA 4.13. (Cauchy). *Sea \mathcal{C} un contorno cerrado simple en un dominio simplemente conexo D , y f una función analítica en D que además tiene derivada f' continua en ese dominio. Entonces,*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que \mathcal{C} está positivamente orientado. Hagamos $R = \mathcal{C} \cup \text{int}(\mathcal{C}) \subset D$. Por hipótesis, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en R , con lo cual, de la proposición 3.28, u y v son continuas en R . Además, como $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$, también por hipótesis y proposición 3.28, tenemos que u_x, u_y, v_x, v_y son todas funciones continuas en R . Estamos, pues, bajo las hipótesis del Teorema de Green en relación a u, v y \mathcal{C} . Luego:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \int_{\mathcal{C}} (u dy + v dx) = \iint_R (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_R (u_x - v_y) dx dy = 0$$

por ser nulos los dos integrandos del penúltimo miembro, gracias a que f es analítica en R y satisface, por lo tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

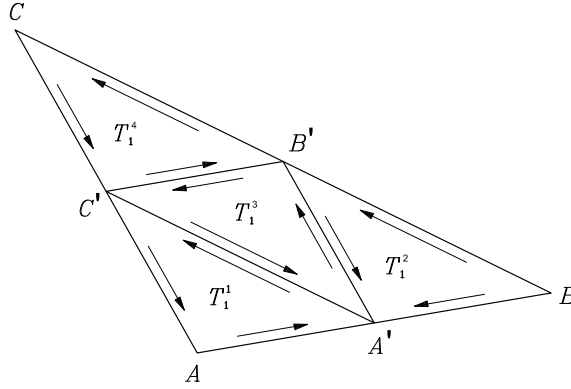
Ahora, si \mathcal{C} está orientada en sentido negativo, $-\mathcal{C}$ lo está en sentido positivo, por lo que, por lo obtenido arriba, es $\int_{-\mathcal{C}} f(z) dz = 0$. Y ya que $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = -\int_{-\mathcal{C}} f(z) dz$, se tiene el resultado también para el caso de contornos orientados en sentido horario. \square

4.2. El teorema de Cauchy-Goursat. Para demostrar el teorema de Cauchy sin la hipótesis de continuidad de f' , comenzaremos mostrando que se cumple para el caso en que el contorno es un triángulo (no degenerado). El resultado se extenderá entonces a polígonos simples, luego a polígonos arbitrarios, y finalmente se obtendrá el resultado para contornos en general.

LEMA 4.14. (Goursat). *Sea \mathcal{C}_0 un triángulo simple en un dominio simplemente conexo D , y f una función analítica en D . Entonces,*

$$\int_{\mathcal{C}_0} f(z) dz = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos A , B y C a los vértices del triángulo, al cual supondremos positivamente orientado. Llamemos A' , B' y C' a los respectivos puntos medios de los lados.



Designemos por T_0 a la región formada por \mathcal{C}_0 con su interior, y digamos que su perímetro vale L . Notar que, siendo D simplemente conexo, es $T_0 \subset D$, por lo que f es analítica en todo punto de T_0 . Llamemos \mathcal{C}_1^1 , \mathcal{C}_1^2 , \mathcal{C}_1^3 y \mathcal{C}_1^4 , respectivamente, a los triángulos $AA'C'$, $A'B'B'$, $B'C'C'$ y $A'B'C'$ (todos con orientación positiva), y T_1^1 , T_1^2 , T_1^3 y T_1^4 , a las regiones constituidas por cada subtriángulo junto con su interior. Cada subtriángulo tiene perímetro $L/2$. Resulta ser que

$$\int_{\mathcal{C}_0} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_1^1} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_1^2} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_1^3} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_1^4} f(z)dz$$

pues se compensan varias integrales sobre lados recorridos primero en un sentido y luego en el inverso. Por lo tanto, de acuerdo a la propiedad triangular,

$$\left| \int_{\mathcal{C}_0} f(z)dz \right| \leq \left| \int_{\mathcal{C}_1^1} f(z)dz \right| + \left| \int_{\mathcal{C}_1^2} f(z)dz \right| + \left| \int_{\mathcal{C}_1^3} f(z)dz \right| + \left| \int_{\mathcal{C}_1^4} f(z)dz \right|$$

De los cuatro términos de la derecha, elijamos uno que sea mayor o igual que los otros tres, y llamemos \mathcal{C}_1 al correspondiente triángulo, y T_1 al triángulo con su relleno. Tendremos que

$$\left| \int_{\mathcal{C}_0} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz \right|$$

Hagamos sobre \mathcal{C}_1 el mismo proceso que hicimos sobre \mathcal{C}_0 : tomemos los puntos medios de sus lados (generándose cuatro triángulos \mathcal{C}_2^1 , \mathcal{C}_2^2 , \mathcal{C}_2^3 y \mathcal{C}_2^4 , cada uno con perímetro $L/(2^2)$), y llamemos T_2^1 , T_2^2 , T_2^3 y T_2^4 a cada subtriángulo con su respectivo interior; escojamos aquel en el cual el módulo de la integral de f es mayor o igual que sobre los otros tres, llamándolo \mathcal{C}_2 , y T_2 a ese triángulo relleno.

Continuando de esta manera, generaremos una sucesión de contornos triangulares $\{\mathcal{C}_n\}_{n \geq 0}$ y de triángulos rellenos $\{T_n\}_{n \geq 0}$ con las siguientes propiedades, válidas para todo n :

- \mathcal{C}_n es la frontera de T_n , y tiene perímetro $L/(2^n)$.
- $T_n \supset T_{n+1}$.
- $\left| \int_{\mathcal{C}_n} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\mathcal{C}_{n+1}} f(z)dz \right|$

Viendo que

$$\left| \int_{\mathcal{C}_0} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz \right| \leq 4 \left(4 \left| \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz \right| \right) \leq \dots$$

llegamos a que, para todo n , es

$$\left| \int_{\mathcal{C}_0} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\mathcal{C}_n} f(z)dz \right|$$

La sucesión $\{T_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de conjuntos compactos no vacíos decreciente, con diámetro tendiendo a 0. Luego, por corolario 2.28, $\bigcap_{n \geq 0} T_n$ consta de un único punto, digamos z_0 , que pertenece a todo T_n , en particular a T_0 , el triángulo original, y por tanto f es derivable en z_0 . Es decir, existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{L^2}$$

Elijamos también un natural N tal que $\frac{L}{2^N} < \delta$. Ya que $z_0 \in T_N$ y que el diámetro de cualquier triángulo no excede a su perímetro (Cap. 2, ej. 8), se tiene que para cualquier $z \in \mathcal{C}_N (\subset T_N)$ es $|z - z_0| \leq \text{diam } T_N \leq \frac{L}{2^N} < \delta$. Entonces, si $z \in \mathcal{C}_N$ y $z \neq z_0$, es $0 < |z - z_0| < \delta$, por lo que

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \frac{\varepsilon}{L^2} |z - z_0| \leq \frac{\varepsilon}{L2^N}$$

y si $z \in \mathcal{C}_N$ y $z = z_0$, $|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| = 0 = \frac{\varepsilon}{L2^N} |z - z_0|$. En resumen, para cualquier $z \in \mathcal{C}_N$, es $|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{L2^N}$.

Teniendo en cuenta que $\int_{\mathcal{C}_N} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)) dz = 0$ (según ejemplo 4.7 y aplicación de propiedades de integración), se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}_N} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\mathcal{C}_N} (f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)) dz + \int_{\mathcal{C}_N} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)) dz \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{L2^N} \frac{L}{2^N} = \frac{\varepsilon}{4^N} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\left| \int_{\mathcal{C}_0} f(z) dz \right| \leq 4^N \frac{\varepsilon}{4^N} = \varepsilon$$

Dado que ε se eligió arbitrariamente, es $\left| \int_{\mathcal{C}_0} f(z) dz \right| = 0$, de donde se sigue el Lema de Goursat si \mathcal{C}_0 tiene orientación positiva. De la propiedad de que invertir el sentido de recorrido del contorno produce cambio de signo al valor de la integral, queda establecido el resultado en general. \square

PROPOSICIÓN 4.15. *Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo y P es un polígono simple en dicho dominio, entonces*

$$\int_P f(z) dz = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en el número de lados del polígono. El caso base de inducción es el Lema 4.14.

Para proceder con el paso inductivo, aceptaremos sin demostración el hecho geométrico de que todo polígono simple de al menos cuatro lados posee una diagonal íntegramente contenida en su interior. Entonces, si P es un polígono de $n+1$ lados, con vértices $z_0, z_1, \dots, z_n, z_0$, existen j, k con $0 \leq j < k \leq n$ tales que el segmento $[z_j, z_k]$ es interior a P . Llamemos P_1 al polígono cuyos vértices son $z_0, \dots, z_j, z_j, z_{j+1}, \dots, z_k, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n, z_0$ y P_2 a aquel cuyos vértices son $z_i, z_{i+1}, \dots, z_j, z_i$, ambos recorridos en el mismo sentido que P . Por hipótesis y por elección de z_i y z_j , f es analítica sobre y dentro de ambos polígonos, que tienen menos lados que P . Luego, por hipótesis inductiva, $\int_{P_1} f(z) dz = 0 = \int_{P_2} f(z) dz$. Se tiene además que los lados de P_1 y de P_2 son los de P , excepto la diagonal $z_i z_j$ que es recorrida en un sentido en P_1 y en sentido inverso en P_2 . Por lo tanto,

$$\int_P f(z) dz = \int_{P_1} f(z) dz + \int_{P_2} f(z) dz = 0$$

según queríamos demostrar. \square

Por un argumento inductivo en el número de lados, es factible demostrar que cualquier polígono es una unión finita de polígonos simples y de segmentos que se recorren dos veces en direcciones opuestas (ejercicio). Entonces, la integral de una función sobre un polígono es la suma de las integrales sobre los polígonos simples que lo componen, más las integrales sobre los lados que se recorren dos veces en direcciones opuestas, cuyos valores se compensan por tener signos opuestos. Por ello, tenemos el siguiente resultado:

COROLARIO 4.16. *Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo y P es un polígono (no necesariamente simple) en dicho dominio, entonces*

$$\int_P f(z)dz = 0$$

Veamos ahora el enunciado general y la demostración del teorema de Cauchy–Goursat.

TEOREMA 4.17. *Si \mathcal{C} es un contorno cerrado en un dominio simplemente conexo D y f es una función analítica en D , entonces $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \mathcal{C} tiene expresión $z(t)$, $a \leq t \leq b$, y sea L su longitud.

Denotemos $I = \int_{\mathcal{C}} f(z)dz$. Mostraremos que $\forall \varepsilon > 0, |I| < \varepsilon$. Sea entonces ε cualquier número real positivo.

Por ser D abierto, para todo $z \in \mathcal{C}$ existe $\delta_z > 0$ tal que $B_{2\delta_z}(z) \subset D$. La familia de entornos $\{B_{\delta_z}(z)\}_{z \in \mathcal{C}}$ es cubrimiento por abiertos para el compacto \mathcal{C} , por lo que hay una subfamilia finita $\{B_{\delta_k}(z_k)\}_{k=1}^n$ que es cubrimiento para \mathcal{C} ($\delta_k > 0, z_k \in \mathcal{C}$). Hagamos

$$D' = \bigcup_{k=1}^n B_{\delta_k}(z_k) \qquad K = \bigcup_{k=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - z_k| \leq \delta_k\}$$

Resulta que D' es abierto, K es un compacto (por ser cerrado y acotado) y $\mathcal{C} \subset D' \subset K \subset D$. Sea $\rho_1 > 0$ tal que cualquier partición de $[a, b]$ con norma menor que ρ_1 induce un polígono P inscrito en \mathcal{C} contenido en D' (prop. 4.4) y, por lo tanto, en K .

Dado que K es un subconjunto compacto de D , f es uniformemente continua en K (prop. 3.43), por lo que existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que si z y w están en K a distancia menor que ε_2 , $|f(z) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2L}$. Correspondiente a ese ε_2 , sea $\rho_2 > 0$ tal que $\forall t, t' \in [a, b], |t - t'| < \rho_2 \Rightarrow |z(t) - z(t')| < \varepsilon_2$ (prop. 3.43, teniendo en cuenta que z es continua en $[a, b]$).

También, recordando que una integral se define como límite de sumas, sea $\rho_3 > 0$ tal que cualquier partición $\{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ con norma menor que ρ_3 produce

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} (z(t_{k+1}) - z(t_k)) f(z(\eta_k)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para cualquier elección de $\eta_k \in [t_k, t_{k+1}]$. En particular, tomando $\eta_k = t_k$, tendremos que

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} (z(t_{k+1}) - z(t_k)) f(z(t_k)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora, elijamos una partición $\{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ con norma ρ menor que $\min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$, y denominemos P al polígono inscrito en \mathcal{C} correspondiente a esta partición; sea $z_1(t)$, $a \leq t \leq b$ una expresión para P , y llamemos L_1 a su longitud. Designemos S_k al segmento de P que va de $z(t_k)$ hasta $z(t_{k+1})$. Observemos que:

- L_1 (la longitud de P) es menor o igual que L (la longitud de \mathcal{C}).
- $\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} (z(t_{k+1}) - z(t_k)) f(z(t_k)) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ pues $\rho < \rho_3$.
- P es un polígono cerrado (pues $z_1(a) = z_1(t_0) = z(t_0) = z(t_n) = z_1(t_n) = z_1(b)$) inscrito en \mathcal{C} y contenido en K , pues $\rho < \rho_1$.
- Si t y t' se eligen en $[a, b]$ de modo que $|t - t'| \leq \rho$, siendo $\rho < \rho_2$ y $P \subset K$, entonces $|z(t) - z(t')| < \varepsilon_2$; en particular, $|z(t_{k+1}) - z(t_k)| < \varepsilon_2$. Luego, para cualquier $z \in S_k$, se tiene que $|z - z(t_k)| \leq |z(t_{k+1}) - z(t_k)| < \varepsilon_2$ y entonces $\forall z \in S_k, |f(z) - f(z(t_k))| < \frac{\varepsilon}{2L}$.

Por lo tanto, siendo $\int_P f(z)dz = 0$ (cor. 4.16), tenemos que

$$\begin{aligned}
|I| &= \left| I - \int_P f(z)dz \right| = \left| I - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_k} f(z)dz \right| = \left| I - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_k} (f(z(t_k)) + f(z) - f(z(t_k))) dz \right| \\
&= \left| I - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_k} f(z(t_k))dz - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_k} (f(z) - f(z(t_k))) dz \right| \\
&= \left| I - \sum_{k=0}^{n-1} f(z(t_k)) (z(t_{k+1}) - z(t_k)) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_k} (f(z) - f(z(t_k))) dz \right| \\
&\leq \left| I - \sum_{k=0}^{n-1} f(z(t_k)) (z(t_{k+1}) - z(t_k)) \right| + \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{S_k} (f(z) - f(z(t_k))) dz \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{S_k} (f(z) - f(z(t_k))) dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2L} |z(t_{k+1}) - z(t_k)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2L} L_1 \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

completando así la demostración. \square

OBSERVACIÓN 4.18. Si \mathcal{C} es un contorno cerrado simple tal que la función $f(z)$ es analítica en cada punto de $\mathcal{C} \cup \text{int}(\mathcal{C})$, entonces $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$. En efecto, para cada $z \in \mathcal{C}$ sea $\varepsilon_z > 0$ tal que f es derivable en cada punto de $B_{\varepsilon_z}(z)$, y hagamos $D = \text{int}(\mathcal{C}) \cup \bigcup_{z \in \mathcal{C}} B_{\varepsilon_z}(z)$, que resulta un dominio simplemente conexo en el que f es analítica. Por lo tanto, siendo $\mathcal{C} \subset D$, es $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$.

4.3. Consecuencias del teorema de Cauchy.

4.3.1. Principio de deformación de contornos. Supongamos que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son dos contornos cerrados simples tales que $\mathcal{C}_1 \subset \text{int}(\mathcal{C}_2)$. Supongamos también que $f(z)$ es una función analítica en todos los puntos que están sobre \mathcal{C}_2 y en $\text{int}(\mathcal{C}_2) - \text{int}(\mathcal{C}_1)$ (esto incluye a los puntos que están sobre \mathcal{C}_1). Entonces, $\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$, cuando ambas curvas son recorridas según la misma orientación.

Para verlo, hagamos de cuenta que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 están positivamente orientados. Elijamos A sobre \mathcal{C}_2 y B sobre \mathcal{C}_1 de modo que el segmento AB no interseque a \mathcal{C}_1 ni a \mathcal{C}_2 en otros puntos. Ahora, elijamos C sobre \mathcal{C}_1 y E sobre \mathcal{C}_2 de modo que el segmento CE no interseque ni a \mathcal{C}_1 ni a \mathcal{C}_2 en otros puntos, ni al segmento AB . Sea \mathcal{C}_3 el segmento de A a B , \mathcal{C}'_1 la porción de \mathcal{C}_1 que va de B a C (en el sentido positivo de \mathcal{C}_1), \mathcal{C}''_1 la porción de \mathcal{C}_1 que va de C a B (en el sentido positivo de \mathcal{C}_1), \mathcal{C}_4 el segmento de C a E , \mathcal{C}'_2 la porción de \mathcal{C}_2 desde A hasta E (en el sentido positivo de \mathcal{C}_2), y \mathcal{C}''_2 la porción de \mathcal{C}_2 desde E hasta A (en el sentido positivo de \mathcal{C}_2). Llamemos Γ_1 a la concatenación de \mathcal{C}_3 con $-\mathcal{C}'_1$ con \mathcal{C}_4 con \mathcal{C}''_2 ; asimismo, designemos por Γ_2 a la concatenación de \mathcal{C}'_2 con $-\mathcal{C}_4$ con $-\mathcal{C}'_1$ con $-\mathcal{C}_3$. (ver fig. 1).

Notemos que

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}'_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}''_1} f(z)dz \qquad \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}'_2} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}''_2} f(z)dz$$

Tanto Γ_1 como Γ_2 son contornos cerrados simples sobre y dentro de los cuales $f(z)$ es analítica, así que $\int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0 = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$, de donde $\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_3} f(z)dz - \int_{\mathcal{C}'_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_4} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}''_2} f(z)dz + \\
\int_{\mathcal{C}'_2} f(z)dz - \int_{\mathcal{C}_4} f(z)dz - \int_{\mathcal{C}'_1} f(z)dz - \int_{\mathcal{C}_3} f(z)dz = 0
\end{aligned}$$

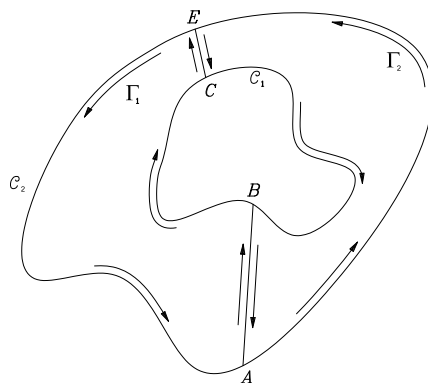


FIGURA 1.

y, en consecuencia,

$$\int_{C'_1} f(z)dz + \int_{C''_1} f(z)dz = \int_{C'_2} f(z)dz + \int_{C''_2} f(z)dz$$

y se sigue el resultado.

Podemos decir todavía más: supongamos que C_2 puede deformarse continuamente hasta transformarse en C_1 sin pasar por ninguna singularidad de $f(z)$; entonces, $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$. Este resultado es un poquito más general que el anterior, ya que no se necesita que C_1 esté íntegramente contenida en $\text{int}(C_2)$. Para verlo, basta elegir un contorno cerrado C_0 contenido en $\text{int}(C_2) \cap \text{int}(C_1)$, que punto a punto esté suficientemente cerca de la frontera de esa intersección, como para que $f(z)$ sea analítica en $(\text{int}(C_2) \cap \text{int}(C_1)) - \text{int}(C_0)$ (ver fig. 2).

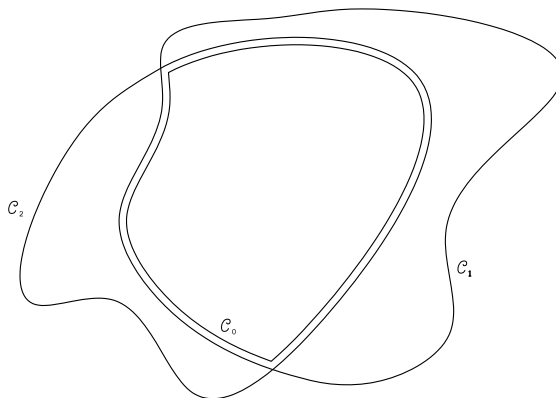


FIGURA 2.

Entonces, C_0 será una curva cerrada contenida en $\text{int}(C_2)$ y la función no tendrá singularidades entre ambas curvas, por lo que es aplicable el resultado anterior, es decir $\int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz$. Y análogamente es $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz$, de donde se tiene lo que se quería.

4.3.2. Independencia de las trayectorias. Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D . Entonces, la integral de $f(z)$ es independiente del camino en D .

En efecto, si C_1 y C_2 son contornos que van ambos desde z_1 hasta z_2 en D , podemos llamar C a la concatenación de C_1 con $-C_2$, resultando C un contorno cerrado en un dominio simplemente conexo en el que $f(z)$ es analítica. Luego, por el Teorema de Cauchy, es $\int_C f(z)dz = 0$, es decir,

$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = 0$, de donde, por propiedades de la integración, es $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$.

Recordando el Teorema Fundamental del Cálculo para funciones complejas (teor. 4.12), obtenemos fácilmente el siguiente resultado.

COROLARIO 4.19. *Cualquier función analítica en un dominio simplemente conexo admite una primitiva en ese dominio.*

5. Las fórmulas integrales de Cauchy. Consecuencias

Ahora vamos a ver muy útiles fórmulas, debidas a quién más sino Cauchy, para evaluar integrales sobre contornos cerrados simples de funciones que tienen cierto tipo de singularidades en el interior del contorno.

TEOREMA 4.20. (Fórmula integral de Cauchy) *Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D , y \mathcal{C} un contorno cerrado simple en D . Entonces, para todo complejo z_0 en el interior de \mathcal{C} , es*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

cuando \mathcal{C} se recorre en sentido positivo.

DEMOSTRACIÓN. Sea z_0 un complejo en $\text{int}(\mathcal{C})$. Veremos que, para todo $\varepsilon > 0$, se cumple que $\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| < \varepsilon$, con lo cual tendremos el resultado. Observemos que el integrando es una función analítica sobre \mathcal{C} y en su interior excepto en z_0 .

Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos $\delta_1 > 0$ tal que $B_{\delta_1}(z_0) \subset \text{int}(\mathcal{C})$. Ahora, por ser analítica f en z_0 , existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo $z \in D$,

$$0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\delta_1}$$

Tomemos ahora cualquier real positivo r tal que $r < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, y designemos por \mathcal{C}_r a la circunferencia con centro en z_0 y radio r recorrida en sentido positivo. Por ser r menor que δ_1 y que δ_2 , tenemos que $\mathcal{C}_r \subset \text{int}(\mathcal{C}) \subset D$, y que, para todo $z \in \mathcal{C}_r$, se cumple que $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi\delta_1}$. Además, por el principio de deformación de contornos, es $\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. Por otro lado, del ejemplo 4.8, surge que $\int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$, y, del ejemplo 4.7 y propiedades de integración, se tiene que $\int_{\mathcal{C}_r} f'(z_0) dz = 0$. Juntando todo esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| &= \left| \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \\ &= \left| \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &= \left| \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz - \int_{\mathcal{C}_r} f'(z_0) dz \right| \\ &= \left| \int_{\mathcal{C}_r} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) dz \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi\delta_1} 2\pi r < \varepsilon \end{aligned}$$

pues $r/\delta_1 < 1$. □

COROLARIO 4.21. Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos contornos cerrados simples tales que $\mathcal{C}_1 \subset \text{int}(\mathcal{C}_2)$. Sea $D = \text{int}(\mathcal{C}_2) - (\mathcal{C}_1 \cup \text{int}(\mathcal{C}_1))$. Supongamos que $f(z)$ es una función analítica en todos los puntos de \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y D . Entonces, para todo $z_0 \in D$, se tiene que

$$2\pi i f(z_0) = \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

cuando ambas curvas son recorridas en sentido positivo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $z_0 \in D$. Tomemos $B, C \in \mathcal{C}_1$, $A, E \in \mathcal{C}_2$ tales que los segmentos AB y CE queden entre \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , no se toquen entre sí y no pasen por z_0 (ver fig. 3).

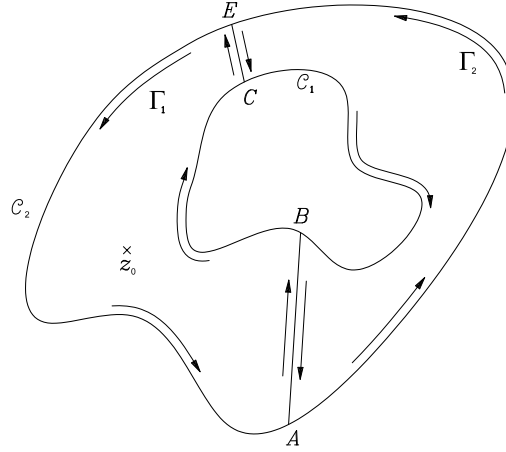


FIGURA 3.

Llamemos Γ_1 a la concatenación sucesiva de \overline{AB} , la porción de \mathcal{C}_1 desde B hasta C en sentido negativo, \overline{CE} y la porción de \mathcal{C}_2 desde E hasta A en sentido positivo. Similarmente, sea Γ_2 la concatenación sucesiva de \overline{BA} , la porción de \mathcal{C}_2 desde A hasta E en sentido positivo, \overline{EC} y la porción de \mathcal{C}_1 desde C hasta B en sentido negativo. Γ_1 es un contorno cerrado simple sobre y dentro del cual f es analítica, y z_0 es un punto interior a él, por lo que, por fórmula de Cauchy, es

$$(6) \quad 2\pi i f(z_0) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Por otro lado, como z_0 no está en el interior del contorno cerrado simple Γ_2 , la función $\frac{f(z)}{z - z_0}$ es analítica sobre y dentro de Γ_2 , por lo que, por el Teorema de Cauchy-Goursat, es

$$0 = \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Sumando miembro a miembro con la ecuación (6), se tiene que

$$2\pi i f(z_0) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Descomponiendo las integrales de acuerdo a las curvas que forman Γ_1 y Γ_2 , resulta

$$2\pi i f(z_0) = \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{-\mathcal{C}_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

pues las integrales sobre los segmentos se compensan. \square

Hay un equivalente de la fórmula integral de Cauchy para el caso en que el integrando es de la forma $f(z)/(z - z_0)^{n+1}$ (con $n \geq 0$), que vemos a continuación. Para n entero no negativo, designaremos por $f^{(n)}$ a la derivada n -ésima de f , entendiendo que $f^{(0)}$ es la propia f .

TEOREMA 4.22. (Fórmula generalizada de Cauchy) Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D , \mathcal{C} un contorno cerrado simple en D , y n un entero no negativo. Entonces, para cualquier $z_0 \in \text{int}(\mathcal{C})$, $f^{(n)}(z_0)$ existe y vale

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

cuando \mathcal{C} se recorre en sentido positivo.

DEMOSTRACIÓN. Desarrollaremos aquí el caso $n = 1$, que en cierta manera contiene el espíritu de la demostración general (que es algo tediosa, y puede encontrarse en el apéndice al final de este capítulo). Verificaremos entonces que, bajo las hipótesis establecidas, se cumple que $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$ cuando z_0 es cualquier punto de $\text{int}(\mathcal{C})$. Por el principio de deformación de contornos, esto equivale a ver que $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$ en donde \mathcal{C}_r es cualquier círculo con centro en z_0 y radio $r > 0$ contenido en el interior de \mathcal{C} .

Por definición, $f'(z_0) = \lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}$. Para cualquier w en el interior de \mathcal{C}_r , por la fórmula de Cauchy tenemos que $f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z - w} dz$, en particular $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. El cociente incremental resulta entonces:

$$\frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} = \frac{1}{2\pi i(w - z_0)} \int_{\mathcal{C}_r} \left(\frac{f(z)}{z - w} - \frac{f(z)}{z - z_0} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - w)(z - z_0)} dz$$

Para cualquier $w \neq z_0$, tenemos que $\frac{1}{(z - w)(z - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{w - z_0}{(z - z_0)^2(z - w)}$, por lo que

$$(7) \quad \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(w - z_0)f(z)}{(z - z_0)^2(z - w)} dz$$

Como el primer término del último miembro es una constante respecto de w , tenemos que

$$\lim_{w \rightarrow z_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

Para el segundo término, consideremos la función $g(w) = \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - w)} dz$ definida en el entorno de radio $r/2$ alrededor de z_0 . Por la continuidad de $f(z)$ sobre \mathcal{C}_r , existe $M > 0$ tal que para todo $z \in \mathcal{C}_r$, es $|f(z)| < M$. Además, para cada $z \in \mathcal{C}_r$, es $|z - z_0| = r$, de modo que $|z - z_0|^2 = r^2$. Y para cada $w \in B_{r/2}(z_0)$ y cada $z \in \mathcal{C}_r$, es $|z - w| > r/2$. Esto significa que, para cada $z \in \mathcal{C}$ y cada $w \in B_{r/2}(z_0)$, es $\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - w)} \right| \leq \frac{2M}{r^2 r} = \frac{2M}{r^3}$, es decir, la función g es de módulo acotado en $B_{r/2}(z_0)$. Por ello, y dado que $\lim_{z \rightarrow z_0} (w - z_0) = 0$, se tiene, por proposición 3.16, que $\lim_{w \rightarrow z_0} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(w - z_0)f(z)}{(z - z_0)^2(z - w)} dz = 0$.

Por lo tanto, tomando en (7) el límite del cociente incremental cuando w tiende a z_0 , tenemos la fórmula que queríamos demostrar. \square

COROLARIO 4.23. Sea f una función analítica en un dominio D . Entonces, para todo $n \geq 0$, $f^{(n)}(z)$ es una función analítica en D .

DEMOSTRACIÓN. Sea $n \geq 0$, y sea $z_0 \in D$. Tomemos $r > 0$ tal que el círculo $\mathcal{C}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ esté contenido en D . Entonces f es analítica sobre y dentro de \mathcal{C}_r , de modo que, por el teorema anterior, $f^{(n+1)}$ existe en cada punto del interior de \mathcal{C}_r . De allí que $f^{(n)}$ es analítica en z_0 . Como z_0 era un punto arbitrario de D , se sigue que $f^{(n)}$ es analítica en D . \square

EJEMPLO 4.24. Usando el teorema de Cauchy o las fórmulas integrales de Cauchy, verifiquemos que si n es cualquier entero, z_0 es cualquier complejo fijo y \mathcal{C}_r es cualquier circunferencia con centro en z_0 y radio $r > 0$ en sentido positivo, entonces

$$\int_{\mathcal{C}_r} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

En el ejemplo 4.8, ya hemos chequeado por parametrización el caso $n = -1$, pero veamos cómo el uso de las fórmulas simplifica la tarea.

Si $n = -1$, basta tomar $f(z) = 1$ (analítica en todo el plano complejo) y aplicar la fórmula del teorema 4.20.

Si $n \geq 0$, el integrando es una función entera, por lo que la integral vale 0.

Si $n \leq -2$, hagamos $m = -n - 1$, teniendo que $m \geq 1$ y que $(z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}$. Entonces, tomando $f(z) = 1$, es $f^{(m)} = 0$, por lo que la integral también vale 0. \square

En base a los resultados recientemente deducidos, obtendremos una sucesión de interesantes propiedades de las funciones complejas.

5.1. Derivadas de las componentes de una función analítica. A partir del importantísimo hecho de que una función $f(z)$ que es analítica en un dominio D tiene derivadas de todos los órdenes en D , y son todas funciones analíticas en el mismo (corolario 4.23), deduciremos la continuidad de las derivadas parciales de cualquier orden de las partes real e imaginaria de f en D .

TEOREMA 4.25. *Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D , entonces todas las derivadas parciales de u y v existen y son funciones continuas en D .*

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos, por inducción matemática, que, para todo $n \geq 0$ y para todos $k, r \in \{0, 1, \dots, n\}$ con $r + k = n$, es $i^k f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^r \partial y^k} + i \frac{\partial^n v(x, y)}{\partial x^r \partial y^k}$.

- Si $n = 0$, debe ser $k = r = 0$, así que $\frac{\partial^0 u}{\partial x^0 \partial y^0} = u$ y $\frac{\partial^0 v}{\partial x^0 \partial y^0} = v$. Además, $f^{(0)}(z) = f(z)$, así que $i^0 f^{(0)}(z) = f(z) = u + iv = \frac{\partial^0 u}{\partial x^0 \partial y^0} + i \frac{\partial^0 v}{\partial x^0 \partial y^0}$, y la proposición se cumple.
- Sea $n > 0$, y supongamos la proposición válida para $n - 1$. Tomemos k y r con $0 \leq k \leq n$, $0 \leq r \leq n$, $r + k = n$. Al menos uno de los dos, supongamos que k , debe ser positivo. Entonces $0 \leq k - 1 \leq n - 1$ y $(k - 1) + r = n - 1$. Luego,

$$\begin{aligned} i^k f^{(n)}(z) &= i^k (f^{(n-1)}(z))' = i (i^{k-1} f^{(n-1)}(z))' = i \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^r \partial y^{k-1}} + i \frac{\partial^{n-1} v}{\partial x^r \partial y^{k-1}} \right)' \\ &= i \left(\frac{\partial^n v}{\partial x^r \partial y^k} - i \frac{\partial^n u}{\partial x^r \partial y^k} \right) = \frac{\partial^n u}{\partial x^r \partial y^k} + i \frac{\partial^n v}{\partial x^r \partial y^k} \end{aligned}$$

cumpléndose entonces la proposición.

Ahora demostremos el teorema. Consideremos la derivada n -ésima de u respecto de x r veces y de y k veces (con, obviamente, $r + k = n$). Por la proposición de más arriba, $\frac{\partial^n u}{\partial x^r \partial y^k}$ es la parte real de $i^k f^{(n)}(z)$. Siendo f analítica, por el Corolario 4.23 tenemos que $f^{(n)}$ existe y es continua en D , y entonces podemos decir lo mismo de $i^k f^{(n)}(z)$. De allí que $\frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^r \partial y^k}$ existe y es continua en D . Lo mismo vale para $\frac{\partial^n v(x, y)}{\partial x^r \partial y^k}$. Es decir, las derivadas parciales de cualquier orden de u y de v existen y son funciones continuas en D . \square

5.2. Transformación de contornos por medio de funciones analíticas. Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es una función de $D \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C} (donde u y v son funciones a valores reales), y que $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) es una FCVR cuya imagen está contenida en D . Se tiene entonces que la composición $(f \circ z)(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$ es también una FCVR cuyas partes real e imaginaria son, respectivamente, $u \circ z$ y $v \circ z$. Si f es continua en D y $z(t)$ es una curva continua, $f \circ z$ es una curva continua (teor. 3.32). Más aún, si f es analítica en D con $f'(z) \neq 0$ en D , y $z(t)$ es una curva suave, $f \circ z$ es también una curva suave. En efecto, hagamos $w(t) = f(z(t))$. Siendo f analítica, es continua en D , y, por lo dicho anteriormente, $w(t)$ es una curva continua. Para ver que es suave, notemos que las derivadas de sus partes real e imaginaria son, por el Teorema de la Derivación de Funciones Compuestas,

$$u'(x(t), y(t)) = u_x(x, y)x'(t) + u_y(x, y)y'(t) = u_x(x, y)x'(t) - v_x(x, y)y'(t)$$

$$v'(x(t), y(t)) = v_x(x, y)x'(t) + v_y(x, y)y'(t) = v_x(x, y)x'(t) + u_x(x, y)y'(t)$$

donde hemos usado las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Siendo u_x y v_x continuas por analiticidad de f' , así como x' e y' por ser $z(t)$ una curva suave, se tiene que u' y v' son funciones continuas de t , por lo que $w'(t)$ existe y es continua en todo punto de $[a, b]$. Para terminar de ver que es una curva suave, falta ver que es $w'(t) \neq 0$ en (a, b) :

$$\begin{aligned} w'(t) &= u'(t) + iv'(t) \\ &= u_x(x, y)x'(t) - v_x(x, y)y'(t) + i(v_x(x, y)x'(t) + u_x(x, y)y'(t)) \\ &= u_x(x, y)x'(t) - v_x(x, y)y'(t) + iv_x(x, y)x'(t) + iu_x(x, y)y'(t) \\ &= (u_x(x, y) + iv_x(x, y))(x'(t) + iy'(t)) \\ &= f'(z)z'(t) \end{aligned}$$

es decir, $w'(t) = f'(z)z'(t)$ (lo cual, de paso, justifica la regla de la cadena para este caso) y ya que $z'(t) \neq 0$ (pues $z(t)$ es curva suave) y $f'(z) \neq 0$ por hipótesis asumida, es $w'(t) \neq 0$ en (a, b) . Luego, $w(t)$ es una curva suave.

5.3. Integración por medio de una primitiva. Entre las consecuencias del Teorema de Cauchy-Goursat, enunciamos la independencia de las trayectorias en la integración de funciones analíticas en dominios simplemente conexos, y el hecho de que, en tales dominios, una función analítica posee primitiva. Podemos ahora enunciar un resultado más general, que justifica un método conveniente para calcular integrales en determinados casos.

PROPOSICIÓN 4.26. *Sea $F(z)$ una función analítica en un dominio D , y sea \mathcal{C} un contorno contenido en D que va desde el punto z_1 al punto z_2 . Entonces $\int_{\mathcal{C}} F'(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \mathcal{C} tiene una parametrización dada por $z(t)$ con $a \leq t \leq b$. Debe ser $z(a) = z_1$ y $z(b) = z_2$. Hagamos $G(t) = F(z(t))$. Por la regla de la cadena, es $G'(t) = F'(z(t))z'(t)$, por lo que, por proposición 4.5,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F'(z)dz &= \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt = \int_a^b G'(t)dt = G(b) - G(a) = F(z(b)) - F(z(a)) \\ &= F(z_2) - F(z_1) \end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado. \square

La proposición anterior dice, en definitiva, que si uno debe calcular $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$ y puede encontrar una primitiva de f que sea analítica sobre \mathcal{C} , entonces la integral se puede resolver por el método de la primitiva, es decir, por diferencia entre el valor de la primitiva en los puntos final e inicial del contorno. Como sabemos que la derivada de una función analítica en un dominio es también analítica en ese dominio, concluimos que **si $f(z)$ no es analítica en algún punto de \mathcal{C} , es inútil buscarle una primitiva que sea analítica en cada punto de \mathcal{C} , de modo que, en ese caso, no podremos resolver la integral por el método de la primitiva.**

EJEMPLO 4.27. Obtener $\int_{\mathcal{C}} z^2 dz$ siendo \mathcal{C} el segmento desde $1 + i$ hasta $-1 + 3i$.

Una primitiva para $f(z) = z$ es $F(z) = z^3/3$, que es analítica en todo el plano complejo. Luego, la integral vale $(-1 + 3i)^3/3 - (1 + i)^3/3 = \frac{28}{3} - \frac{20}{3}i$.

Más generalmente, podemos ver que siempre es $\int_{\mathcal{C}} z^2 dz = z_2^3/3 - z_1^3/3$, siendo z_2 y z_1 , respectivamente, los puntos final e inicial de \mathcal{C} . \square

EJEMPLO 4.28. Obtener $\int_{\mathcal{C}} z^{-1} dz$ si \mathcal{C} es el arco de circunferencia con centro en el origen que va desde 1 hasta i en sentido horario.

Uno tiene ganas de considerar, como primitiva, la rama principal de $\log z$, es decir, $F_1(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ con $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$, habida cuenta de que su derivada es precisamente $1/z$. Pero enseguida notamos que esta elección no satisface las hipótesis de la proposición, pues esa primitiva es analítica en todo el plano complejo salvo en el semieje real no positivo, y la curva

pasa por -1 . Tampoco nos serviría usar, como primitiva, la función $F_2(z) = \ln|z| + i \arg z$ con $0 \leq \arg z < 2\pi$, que no es analítica en el semieje real no negativo, siendo que \mathcal{C} pasa por 1.

Sin embargo, podemos considerar la siguiente primitiva: $F(z) = \ln|z| + i \arg z$ con $\pi/4 < \arg z \leq 9\pi/4$. Es analítica en todo el plano complejo, excepto en la semirrecta que comienza en el origen y tiene dirección 45° (que no toca a \mathcal{C}), y su derivada es $1/z$, lo que puede verse por aplicación de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar. Siendo $z_2 = i$, se tiene que $\arg z_2 = \pi/2 + 2k\pi$, y, de todos esos ángulos, el que satisface estar entre $\pi/4$ y $9\pi/4$ es $\pi/2$, luego $F(z_2) = \ln|i| + i\pi/2 = i\pi/2$. Análogamente, para evaluar $F(z_1)$ corresponde tomar $\arg z_1 = 2\pi$ y entonces $F(z_1) = \ln|1| + i2\pi = 2\pi i$. Entonces, $\int_{\mathcal{C}} z^{-1} dz = i\frac{\pi}{2} - i2\pi = -3\pi i/2$, hecho que puede confirmarse resolviendo la integral por definición.

Si hubiéramos resuelto tomando como primitiva la función F_1 o la F_2 que especificamos más arriba, en cualquiera de los dos casos correspondía tomar $\arg z_2 = \pi/2$ y $\arg z_1 = 0$, por lo que la integral valdría, según nuestros cálculos, $\ln|i| + i\pi/2 - (\ln|1| + i0) = i\pi/2$, resultado erróneo aunque sabemos por qué. \square

5.4. Teorema de Morera. Este resultado es un recíproco del Teorema de Cauchy.

TEOREMA 4.29. *Si $f(z)$ es continua en un dominio D y si $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ para todo contorno cerrado \mathcal{C} contenido en D , entonces $f(z)$ es analítica en D .*

DEMOSTRACIÓN. Primero mostremos que, bajo las hipótesis del teorema, la integral de $f(z)$ es independiente del camino en D . Sean z_1 y z_2 dos puntos de D , y \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos contornos en D que van de z_1 a z_2 . Entonces la concatenación de \mathcal{C}_1 y $-\mathcal{C}_2$ es un contorno cerrado en D , por lo que $\int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{-\mathcal{C}_2} f(z) dz = 0$, y eso significa, por propiedades de la integración, que $\int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz$, es decir, la integral es independiente del camino.

Ahora, sea z_0 cualquier punto de D , y definamos en D la función $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$. $F(z)$ es analítica en D , y $F'(z) = f(z)$ (Teor. 4.12). Siendo $f(z)$ la derivada de una función analítica en D , es $f(z)$ analítica en D (Cor. 4.23). \square

5.5. Desigualdad de Cauchy. Veremos ahora una cota para la n -ésima derivada de una función en un punto, cuando sabemos que la función es analítica en algún círculo que contiene a ese punto.

PROPOSICIÓN 4.30. *Sea $f(z)$ analítica sobre y dentro de un círculo \mathcal{C} de centro z_0 y radio r . Sea M una cota superior para $|f(z)|$ sobre \mathcal{C} . Entonces, para todo entero no negativo n ,*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$

DEMOSTRACIÓN. Para todo z sobre \mathcal{C} , es $|z - z_0| = r$, y entonces $|z - z_0|^{n+1} = r^{n+1}$. Luego, para todo $z \in \mathcal{C}$, es

$$\frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{|z - z_0|^{n+1}} = \frac{M}{r^{n+1}}$$

De allí,

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r$$

por lo que $|f^{(n)}(z_0)| \leq Mn!/r^n$. \square

5.6. Teorema de Liouville. Este sorprendente teorema enuncia que si una función no constante es analítica en todo el plano complejo, entonces su módulo toma valores arbitrariamente grandes (comparar con la función real $f(x) = \cos x$).

TEOREMA 4.31. *Sea $f(z)$ analítica en todo el plano complejo. Si $|f(z)|$ es una función acotada en \mathbb{C} , entonces $f(z)$ es una función constante.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, existe un real $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un complejo arbitrario, y ε cualquier real positivo. Tomemos $r = M/\varepsilon$, y consideremos el círculo \mathcal{C}_r con centro en z_0 y radio r . Por la desigualdad de Cauchy con $n = 1$, tenemos que, siendo $f(z)$ analítica y acotada sobre y dentro de \mathcal{C}_r , será $|f'(z_0)| \leq M/r = \varepsilon$. Tenemos entonces que para todo $\varepsilon > 0$ es $|f'(z_0)| \leq \varepsilon$, por lo que debe ser $|f'(z_0)| = 0$, es decir, $f'(z_0) = 0$. Ya que z_0 era arbitrario, se sigue que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces, f debe ser una función constante. \square

5.7. Teorema fundamental del Álgebra. Usando los resultados anteriores, vamos a demostrar ahora que cualquier polinomio no constante debe tener al menos una raíz compleja.

TEOREMA 4.32. (Gauss) *Si $f(z)$ es un polinomio no constante sobre el cuerpo de los complejos, entonces la ecuación $f(z) = 0$ tiene al menos una raíz compleja.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ con $n \geq 0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Supongamos que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Definamos entonces $g(z) = 1/f(z)$, que resultará analítica en todo el plano complejo. Y además $|g(z)|$ está acotada en \mathbb{C} . Para verlo, hagamos $w(z) = \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}$ de modo que es $f(z) = (a_n + w(z))z^n$. Notemos que para cada j entre 1 y n se puede encontrar un r_j tal que si $|z| > r_j$, entonces $\frac{|a_{n-j}|}{|z^j|} < \frac{|a_n|}{2n}$ (pues $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|a_{n-j}|}{|z^j|} = 0$). Hagamos $r = \max\{r_j : 1 \leq j \leq n\}$, y $D_r = \{z : |z| \leq r\}$. Entonces, cualquier z con módulo mayor que r cumple que

$$|w(z)| \leq \sum_{j=1}^n \frac{|a_{n-j}|}{|z^j|} < n \frac{|a_n|}{2n} = \frac{|a_n|}{2}$$

Consecuentemente, cuando $|z| > r$, es $|a_n + w(z)| = |a_n - (-w(z))| \geq \left| |a_n| - |-w(z)| \right| = |a_n| - |w(z)| > |a_n|/2$, lo que nos permite ver que si $|z| > r$ es

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{|a_n + w(z)||z|^n} < \frac{2}{|a_n|r^n}$$

Luego, $|g|$ es acotada en el exterior del disco D_r . Pero además, siendo D_r compacto y $g(z)$ continua, $|g|$ es acotada en él. Resumiendo, $|g|$ es una función acotada en \mathbb{C} .

O sea que $g(z)$ satisface las hipótesis del Teorema de Liouville, y entonces $g(z)$ es una constante, lo cual, por la definición de $g(z)$, implica que $f(z)$ es una función constante.

Hemos demostrado que si un polinomio no tiene raíces en \mathbb{C} , es una función constante. Luego, si un polinomio no es una constante, debe tener al menos una raíz compleja. \square

APÉNDICE: DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA GENERALIZADA DE CAUCHY

Recordemos que la fórmula generalizada de Cauchy establece que si $f(z)$ es una función analítica sobre y dentro de un contorno cerrado simple \mathcal{C} , y n es cualquier entero no negativo, entonces, para cualquier $z_0 \in \text{int}(\mathcal{C})$, $f^{(n)}(z_0)$ existe y vale

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

cuando \mathcal{C} se recorre en sentido positivo.

Lo demostramos por inducción matemática sobre n . Para el caso $n = 0$, $f^{(0)}(z_0)$ existe pues es $f(z_0)$, y la fórmula a verificar corresponde a la fórmula de Cauchy que hemos demostrado en el teorema 4.20, así que la afirmación es verdadera. Ahora supongamos la afirmación válida para n , es decir, supongamos que $f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz$, para cualquier w en el interior de \mathcal{C} . Debemos mostrar que la afirmación vale para $n + 1$, es decir, que $f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} dz$ para cualquier $z_0 \in \text{int}(\mathcal{C})$. Sea entonces z_0 un punto interior de \mathcal{C} . Sea $r > 0$ tal que el

círculo $\mathcal{C}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ esté contenido en $\text{int}(\mathcal{C})$. Por el principio de deformación de contornos, sabemos que $\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz = \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz$, así que debemos probar que $f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz$. De la definición de derivada, y considerando que, por hipótesis inductiva y principio de deformación de contornos, es $f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz$ para cada w en el interior del círculo \mathcal{C}_r , tenemos que

$$f^{(n+1)}(z_0) = \lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f^{(n)}(w) - f^{(n)}(z_0)}{w - z_0} = \lim_{w \rightarrow z_0} \frac{1}{w - z_0} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \left(\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} - \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right) dz$$

o sea

$$(8) \quad f^{(n+1)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \lim_{w \rightarrow z_0} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{1}{w - z_0} \frac{(z - z_0)^{n+1} - (z - w)^{n+1}}{(z - z_0)^{n+1}(z - w)^{n+1}} f(z) dz$$

Por el teorema del binomio, tenemos que

$$\begin{aligned} (z - z_0)^{n+1} &= ((z - w) + (w - z_0))^{n+1} \\ &= (z - w)^{n+1} + (n+1)(z - w)^n(w - z_0) + \frac{n+1}{2(n-1)!} (z - w)^{n-1}(w - z_0)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n+1}{2(n-1)!} (z - w)^2(w - z_0)^{n-1} + (n+1)(z - w)(w - z_0)^n + (w - z_0)^{n+1} \end{aligned}$$

por lo que

$$(z - z_0)^{n+1} - (z - w)^{n+1} = (n+1)(z - w)^n(w - z_0) + (w - z_0)^2 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j+2} (z - w)^{n-1-j}(w - z_0)^j$$

De allí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z_0} \frac{(z - z_0)^{n+1} - (z - w)^{n+1}}{(z - z_0)^{n+1}(z - w)^{n+1}} f(z) &= \frac{(n+1)f(z)}{(z - z_0)^{n+1}(z - w)} + \\ &\quad (w - z_0) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j+2} \frac{(w - z_0)^j f(z)}{(z - w)^j (z - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

y entonces, dado que $\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}(z-w)} = \frac{1}{(z-z_0)^{n+2}} + \frac{w-z_0}{(z-z_0)^{n+2}(z-w)}$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{C}_r} \frac{1}{w - z_0} \frac{(z - z_0)^{n+1} - (z - w)^{n+1}}{(z - z_0)^{n+1}(z - w)^{n+1}} f(z) dz \\ &= \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(n+1)f(z)}{(z - z_0)^{n+1}(z - w)} dz + (w - z_0) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j+2} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(w - z_0)^j f(z)}{(z - w)^j (z - z_0)^{n+1}} dz \\ &= \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(n+1)f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} dz + \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(n+1)(w - z_0)}{(z - z_0)^{n+2}(z - w)} f(z) dz + \\ &\quad (w - z_0) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j+2} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(w - z_0)^j f(z)}{(z - w)^j (z - z_0)^{n+1}} dz \end{aligned}$$

Vamos ahora a demostrar que los límites, cuando w tiende a z_0 , de los términos del último miembro existen, determinando sus valores:

1. $\lim_{w \rightarrow z_0} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(n+1)f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz = (n+1) \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz$ pues la expresión no depende de w .
2. Veremos ahora que $\lim_{w \rightarrow z_0} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(n+1)(w-z_0)f(z)}{(z-z_0)^{n+2}(z-w)} dz = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de $f(z)$ sobre \mathcal{C}_r , existe un $M > 0$ tal que para todo $z \in \mathcal{C}_r$, es $|f(z)| < M$. Además, para cada $z \in \mathcal{C}_r$, es $|z - z_0| = r$, de modo que $|z - z_0|^{n+2} = r^{n+2}$. Y si se elige w en el interior

del círculo con centro en z_0 y radio $r/2$, se tiene que, para todo $z \in \mathcal{C}_r$, $|z - w| > r/2$ pues

$$|z - w| = |(z - z_0) - (w - z_0)| \geq ||z - z_0| - |w - z_0|| = r - |w - z_0| > r/2$$

y entonces, para $z \in \mathcal{C}_r$, es $\frac{1}{|z-w|} < \frac{2}{r}$. Por lo tanto, para cualquier $z \in \mathcal{C}_r$ tenemos que

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}(z - w)} \right| \leq \frac{2M}{r^{n+2}r} = \frac{2M}{r^{n+3}}$$

Entonces, por la desigualdad ML, es

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(n+1)(w - z_0)f(z)}{(z - z_0)^{n+2}(z - w)} dz \right| &= (n+1)|w - z_0| \left| \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}(z - w)} dz \right| \\ &\leq |w - z_0| \frac{2M(n+1)}{r^{n+3}} 2\pi r = |w - z_0| \frac{4\pi(n+1)M}{r^{n+2}} \end{aligned}$$

de donde vemos que basta tomar $\delta = \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{r^{n+2}\varepsilon}{4\pi(n+1)M} \right\}$ para satisfacer la definición de límite.

3. Finalmente veremos que, de modo análogo, para cada j entre 0 y $n-1$, es

$$\lim_{w \rightarrow z_0} (w - z_0) \binom{n+1}{j+2} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(w - z_0)^j f(z)}{(z - w)^j (z - z_0)^{n+1}} dz = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de $f(z)$ sobre \mathcal{C}_r , existe un $M > 0$ tal que para todo $z \in \mathcal{C}_r$, es $|f(z)| < M$. Además, para cada $z \in \mathcal{C}_r$, es $|z - z_0| = r$, de modo que $|z - z_0|^{n+1} = r^{n+1}$. Y si se elige w en el interior del círculo con centro en z_0 y radio $r/2$, se tiene que, para todo $z \in \mathcal{C}_r$, $|z - w| > r/2$, por lo que, para $z \in \mathcal{C}_r$, es $\frac{1}{|z-w|^j} < \frac{2^j}{r^j}$. Por lo tanto, para cualquier $z \in \mathcal{C}_r$ tenemos que

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}(z - w)^j} \right| \leq \frac{M2^j}{r^{n+1}r^j} = \frac{2^j M}{r^{n+j+1}}$$

Entonces, por la desigualdad ML, es

$$\begin{aligned} &\left| (w - z_0) \binom{n+1}{j+2} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{(w - z_0)^j f(z)}{(z - w)^j (z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &= \binom{n+1}{j+2} |w - z_0|^{j+1} \left| \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}(z - w)^j} dz \right| \\ &\leq |w - z_0|^{j+1} \binom{n+1}{j+2} \frac{2^j M}{r^{n+j+1}} 2\pi r \\ &= |w - z_0|^{j+1} \binom{n+1}{j+2} \frac{2^{j+1} \pi M}{r^{n+j}} \end{aligned}$$

de donde vemos que basta tomar $\delta = \min \left\{ \frac{r}{2}, \sqrt[j+1]{\frac{r^{n+j}\varepsilon}{2^{j+1}\pi M} \binom{n+1}{j+2}^{-1}} \right\}$ para satisfacer la definición de límite.

Con los resultados de estos tres ítems, tenemos que la fórmula (8) queda:

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} (n+1) \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} dz = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} dz$$

que era el resultado que buscábamos. \square

EJERCICIOS

- Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ funciones complejas de variable real, con $a \leq t \leq b$ para ambas. Suponga que f'_1 y f'_2 existen en $[a, b]$. Mostrar que $(f_1 + f_2)'(t) = f'_1(t) + f'_2(t)$ y $(f_1 f_2)'(t) = f'_1(t) f_2(t) + f_1(t) f'_2(t)$.
- Evaluar $\int_C f(z) dz$ para los siguientes casos:
 - $f(z) = \bar{z}$
 - \mathcal{C} : el segmento desde i hasta 1.
 - \mathcal{C} : el arco de la parábola $y = (1 - x)^2$ desde i hasta 1.
 - \mathcal{C} : el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ desde i hasta 1, en sentido horario.
 - $f(z) = e^z$
 - \mathcal{C} : el segmento desde 0 hasta 1.
 - \mathcal{C} : el segmento desde 1 hasta $1 + i$.
 - \mathcal{C} : segmento desde $1 + i$ hasta 0.
(Compruebe que se satisface el teorema de Cauchy al integrar e^z sobre el perímetro del triángulo de vértices $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ y $z_2 = 1 + i$.)
 - $f(z) = \frac{1}{z+1+i}$
 - \mathcal{C} : El arco de la circunferencia con centro $-1 - i$ y radio 1, desde -1 hasta $-2 - i$, en sentido horario.
 - \mathcal{C} : El arco de la circunferencia con centro $-1 - i$ y radio 1, desde $-2 - i$ hasta -1 , en sentido antihorario.
 - $f(z) = (z - z_0)^n$, \mathcal{C} : el círculo con centro en z_0 y radio $r > 0$ (*Sol.: vale $2\pi i$ si $n = -1$, y 0 en cualquier otro caso*)
- Mostrar que si \mathcal{C} es un contorno, entonces admite una parametrización $z(t)$, $a \leq t \leq b$, con $a < b$ elegidos arbitrariamente.
- Sea $f(t)$, $a \leq t \leq b$, una función compleja de variable real continua en $[a, b]$. Definamos $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mediante $g(s) = \int_a^s f(t) dt$. Mostrar que g' existe en $[a, b]$, y está dada por $g'(s) = f(s)$. (*Sugerencia: use el teorema fundamental del cálculo para funciones reales continuas de una variable real.*)
- Completar los detalles de la demostración de que si f es continua sobre un contorno \mathcal{C} con parametrización $z(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda partición $\{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ con norma menor que δ produce

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz - \sum_{k=0}^{n-1} f(z(\eta_k)) (z(t_{k+1}) - z(t_k)) \right| < \varepsilon$$

para cualquier elección de cada η_k en el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$.

- Sean \mathcal{C} un contorno y f una función continua sobre \mathcal{C} . Sean $z_1(t)$, $a_1 \leq t \leq b_1$ y $z_2(t)$, $a_2 \leq t \leq b_2$ dos parametrizaciones equivalentes para \mathcal{C} . Mostrar que

$$\int_{a_1}^{b_1} f(z_1(t)) z'_1(t) dt = \int_{a_2}^{b_2} f(z_2(t)) z'_2(t) dt,$$

y, en consecuencia, que el valor de la integral de f sobre \mathcal{C} no depende de la parametrización elegida para \mathcal{C} . (*Sugerencia: Si I_1 e I_2 denotan ambas integrales, muestre que $\forall \varepsilon > 0$, $|I_1 - I_2| < \varepsilon$. Para ello, sea g la biyección continua entre $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$. Aplique a cada integral el ejercicio anterior para $\varepsilon/2$ y, aprovechando la continuidad uniforme de g , genere una partición tal que la correspondiente suma S_1 se aproxima a I_1 en $\varepsilon/2$, y los transformados por g de la partición formen una partición de $[a_2, b_2]$ cuya correspondiente suma S_2 se aproxima a I_2 en $\varepsilon/2$; pero $S_2 = S_1$.)*

- Mostrar:
 - $\left| \int_0^{2+i} e^{z^2} dz \right| \leq \sqrt{5} e^3$
 - $\left| \int_i^1 e^{i \operatorname{Ln} z} \right| \leq e^{\frac{\pi}{2}}$

- c) $\left| \int_{\mathcal{C}} e^{\frac{1}{z}} dz \right| \leq \frac{33}{10}$ con \mathcal{C} el segmento recto desde i hasta $2+i$.
8. Demostrar que cualquier polígono es una unión finita de polígonos simples y de segmentos que se recorren dos veces en direcciones opuestas. (*Sugerencia:* inducción en el número de lados del polígono; para un polígono $[z_0, z_1, \dots, z_n, z_0]$ de $n+1$ lados, considere las distintas alternativas para z_n en cuanto a su posición con respecto a z_{n-1} y z_0 : en dicho segmento, fuera del segmento pero sobre la recta que éste determina, o fuera de dicha recta.)
9. Usando el teorema de Cauchy o la fórmula integral de Cauchy, calcular:
- i) $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z+2} dz$ ii) $\int_{|z+2|=2} \frac{\cos z}{z+2} dz$ iii) $\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{1-e^z}$
iv) $\int_{|z|=3} \frac{dz}{(z-2)e^z}$ v) $\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{1+z^3}$ vi) $\int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{2z+1}{z^2+z} dz$
10. Por medio de la fórmula generalizada de Cauchy, obtener:
- i) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz$, con $n \in \mathbb{N}$ ii) $\int_{|z+1|=5} \frac{\cos z}{(z+2)^2} dz$
iii) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z}}{(z+i)^3 z^2} dz$ iv) $\int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z}}{(z+i)^3 z^2} dz$
v) $\int_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z^{n+1}} dz$, con $n \in \mathbb{N}$ (*Sol.*: $2\pi i a^n / (n!)$)
11. En caso de ser posible, calcular las siguientes integrales $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ por el método de la primitiva. Si no es posible, explicar por qué.
- a) $f(z) = (z^2 - \frac{1}{z})$, \mathcal{C} : el semicírculo desde i hasta $-i$ que pasa por -1 .
b) $f(z)$ la determinación principal de $z^{\frac{1}{2}}$, \mathcal{C} : el semicírculo desde i hasta $-i$ que pasa por -1 .
c) $f(z)$ la rama principal de $z^{\frac{1}{2}}$, \mathcal{C} : el segmento desde $-1+i$ hasta $1+i$.
d) $f(z)$ la rama principal de $\ln z$, \mathcal{C} : el semicírculo desde i hasta $-i$ que pasa por -1 .
12. Calcular las siguientes integrales:
- a) $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-i)(z+1+i)}$, siendo \mathcal{C} :
- i) $|z| = \frac{7}{5}$ ii) $|z+i| = \frac{3}{2}$ iii) $|z-1-i| = 5$
- b) $\int_{\mathcal{C}} \frac{2z+1}{z^2+z} dz$, siendo \mathcal{C} :
- i) $|z| = \frac{1}{4}$ ii) $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ iii) $|z| = 2$
- c) $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{1+z^3}$, siendo \mathcal{C} el círculo $|z+1| = 1$ en sentido antihorario.
- d) $\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos z}{z(z^2+4)} dz$, siendo \mathcal{C} :
- i) $|z| = 1$ ii) $|z-i| = 2$ iii) $|z| = 3$
- e) $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$ sobre el círculo $|z| = 3$.
- f) $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ siendo \mathcal{C} :
- i) $|z| = \frac{1}{2}$ ii) $|z-1| = \frac{1}{2}$ iii) $|z| = 2$
- g) $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2(z^2+4)}$ sobre el círculo $|z| = 3$ en sentido horario.
- h) $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2-z+2}{z^3+2z^2} dz$ sobre el rectángulo de vértices $3 \pm i$ y $-1 \pm i$ en sentido horario.
13. El número de vueltas de un contorno cerrado alrededor de un punto.
- a) Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Calcular $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} (z-z_0)^{-1} dz$ siendo \mathcal{C} el contorno con parametrización $z(t) = z_0 + e^{int}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (observar que $z_0 \notin \mathcal{C}$). ¿Qué representa geométicamente n ? ¿Cuál es la interpretación geométrica del signo de n ?
- b) Sea \mathcal{C} un contorno cerrado (no necesariamente simple) y $z_0 \notin \mathcal{C}$. Mostrar que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} (z-z_0)^{-1} dz$ es un número entero. (*Sugerencia:* Sea $z(t)$, $a \leq t \leq b$ una parametrización para \mathcal{C} . Considerar $g(s) = \int_a^s \frac{z'(t)}{z(t)-z_0} dt$, con $a \leq s \leq b$. Aplicar propiedades de la derivación de funciones complejas de variable real para mostrar que $\frac{d}{ds} (e^{-g(s)}(z(s)-z_0)) = 0$, por lo que $e^{-g(s)}(z(s)-z_0)$ es constante. Concluir observando que $z(a) = z(b)$, $g(a) = 0$, $\int_{\mathcal{C}} (z-z_0)^{-1} dz = g(b)$.)

De acuerdo al inciso anterior, dados un contorno cerrado \mathcal{C} y un número complejo $z_0 \notin \mathcal{C}$, tiene sentido definir

$$n(\mathcal{C}, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} (z - z_0)^{-1} dz$$

que será un número entero conocido como el **número de vueltas de \mathcal{C} alrededor de z_0** . Busque una interpretación intuitiva del mismo.

14. Demostrar el *Teorema del valor medio de Gauss*: Si f es analítica sobre una circunferencia y en su interior, el valor de f en el centro del círculo es igual a la media aritmética de los valores de f sobre la circunferencia. (*Sugerencia*: aplicar la fórmula integral de Cauchy y parametrizar.)
15. Suponga que f es analítica en $B_r(z_0)$ y que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z en ese entorno. Demuestre que f debe ser constante en el entorno. (*Sugerencia*: Para cualquier z en el entorno, considere la circunferencia \mathcal{C}_z con centro z_0 y radio $|z - z_0|$; aplique el Teorema del valor medio de Gauss y la hipótesis de maximalidad de $|f(z_0)|$ para concluir que $|f|$ es constantemente igual a $|f(z_0)|$ sobre \mathcal{C}_z .)
16. Demuestre el *Teorema del Módulo Máximo*: Si f es analítica y no constante en un dominio D , entonces $|f|$ no alcanza un valor máximo en D . Concluya que si f es continua en un compacto conexo K y analítica y no constante en el interior de K , entonces $|f|$ alcanza su máximo valor en algún punto de la frontera de K . (*Sugerencia*: Suponga que existe z_0 en D tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z en D . Sea $z \in D$. Hay una poligonal P en D desde z_0 hasta z . Aprovechando que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(w) \subset D$ para todo $w \in P$, construya una familia finita de entornos D_0, \dots, D_n de igual radio, todos contenidos en D , con centros respectivos en puntos w_0, \dots, w_n de P , tal que $w_0 = z_0$, $w_n = z$ y $w_{k+1} \in D_k$ ($k = 0, \dots, n-1$). Aplicando inductivamente el ejercicio 15, muestre que $f(z) = f(z_0)$.)

SUCESIONES Y SERIES. SERIES DE TAYLOR

Estamos aquí interesados en sucesiones y series cuyos términos son números complejos, con la intención de extender nociones que son conocidas en el campo de los números reales. En particular, analizaremos la posibilidad de obtener desarrollos en serie de potencias para funciones que sean analíticas en ciertos conjuntos.

1. Sucesiones complejas

DEFINICIÓN 5.1. Una **sucesión compleja** es una función z de los naturales en \mathbb{C} . Designamos por z_n al n -ésimo término de la sucesión (es decir, a la imagen de n a través de la función z) y por $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (o, más brevemente, $\{z_n\}$) a la sucesión completa. El **campo de variabilidad** de la sucesión $\{z_n\}$ es $\{w \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N} : z_n = w\}$, es decir, el conjunto de valores que toma la sucesión. Una sucesión se dice **acotada** si su campo de variabilidad es un conjunto acotado. Si $E \subset \mathbb{C}$ y $\{z_n\}$ tiene campo de variabilidad contenido en E , entonces decimos que $\{z_n\}$ **es una sucesión en E** , y escribimos $\{z_n\} \subset E$.

Decimos que una sucesión $\{z_n\}$ es **convergente** si existe un número $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |L - z_n| < \varepsilon$. Es decir, a partir del N que corresponde a ε , todos los términos de la sucesión están en $B_\varepsilon(L)$. En ese caso, decimos que la sucesión converge hacia L , o que L es el límite de $\{z_n\}$, y escribimos $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$.

Una sucesión $\{z_n\}$ **diverge a infinito** ($\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$) si $\forall K \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |z_n| > K$.

Si z_n está definido al menos para todo $n \geq n_0$, la expresión $\{z_n\}_{n \geq n_0}$, con n_0 no necesariamente 0, equivale naturalmente a la sucesión $\{z_{n+n_0}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Observemos que decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L \in \mathbb{C}$ es equivalente a decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} |L - z_n| = 0$ (convergencia de sucesión de números reales).

TEOREMA 5.2. Sea $\{z_n\}$ una sucesión compleja, y $L \in \mathbb{C}$.

1. $\{z_n\}$ converge hacia L si, y sólo si, cualquier entorno de L contiene a todos los términos de la sucesión, salvo una cantidad finita de ellos.
2. Si $\{z_n\}$ converge, su límite es único.
3. Si $\{z_n\}$ converge, es acotada.

DEMOSTRACIÓN.

1. Supongamos primero que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$. Sea $r > 0$. Existe N tal que para todo $n \geq N, |L - z_n| < r$, por lo que para todo $n \geq N, z_n \in B_r(L)$, es decir, $B_r(L)$ contiene todos los términos de la sucesión salvo, posiblemente, z_0, \dots, z_{N-1} .

Recíprocamente, supongamos que cada entorno de L contiene todos los términos de la sucesión, salvo una cantidad finita. Sea $\varepsilon > 0$, y hagamos $F = \{n \in \mathbb{N} : z_n \notin B_\varepsilon(L)\}$. Por hipótesis, F es un conjunto finito, así que tomando $N = 1 + \max F$, tenemos que, para cualquier $n \geq N, n \notin F$, es decir, $|z_n - L| < \varepsilon$. Siendo ε arbitrario, es $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$.

2. Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$, y sea L' un complejo distinto de L . Consideremos $\varepsilon = |L - L'|/2$, que será positivo. Por el ítem anterior, $B_\varepsilon(L)$ contiene todos los términos de la sucesión, salvo quizá una cantidad finita. Siendo $B_\varepsilon(L) \cap B_\varepsilon(L') = \emptyset$, concluimos que $B_\varepsilon(L')$ contiene a lo sumo una cantidad finita de términos de la sucesión, y entonces, nuevamente por el ítem anterior, $\{z_n\}$ no converge a L' .

3. Sea $\{z_n\}$ convergente hacia L . Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $|L - z_n| < 1$ (y, en consecuencia, $|z_n| < |L| + 1$). Sea $M = 1 + \max\{|z_0|, \dots, |z_{N-1}|, |L| + 1\}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < M$, por lo que la sucesión $\{z_n\}$ es acotada. \square

Cada término de una sucesión compleja $\{z_n\}$ tiene parte real que llamaremos x_n y parte imaginaria y_n . Es decir, $z_n = x_n + iy_n$. Hay dos sucesiones de números reales que pueden entonces asociarse naturalmente a la $\{z_n\}$: ellas son $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, que llamaremos, respectivamente, la **sucesión de partes reales** y la **sucesión de partes imaginarias**. Veremos cómo el estudio de la convergencia de la sucesión $\{z_n\}$ en \mathbb{C} se puede reducir al estudio de la convergencia de $\{x_n\}$ y de $\{y_n\}$ en \mathbb{R} .

PROPOSICIÓN 5.3. *Sea $\{z_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de números complejos, con $z_n = x_n + iy_n$, y sea L un número complejo. Se tiene que $\{z_n\}$ converge a L si, y sólo si, $\{x_n\}$ converge a $\operatorname{Re} L$ e $\{y_n\}$ converge a $\operatorname{Im} L$.*

DEMOSTRACIÓN. Digamos que las partes real e imaginaria de L son, respectivamente, x e y .

Para la ida, supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe un N tal que para todo $n \geq N$, $|z_n - L| < \varepsilon$. Pero es $|z_n - L| \geq |x_n - x|$ y $|z_n - L| \geq |y_n - y|$. Luego, para todo $n \geq N$ es $|x_n - x| < \varepsilon$ y $|y_n - y| < \varepsilon$. Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Para la vuelta, sea $\varepsilon > 0$. Existe N_1 tal que para todo $n \geq N_1$, $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Del mismo modo, existe N_2 tal que para todo $n \geq N_2$, $|y_n - y| < \varepsilon/2$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, vemos que para todo $n \geq N$ es $|z_n - L| = |x_n + iy_n - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, por lo que $\{z_n\}$ converge a L . \square

Los puntos de acumulación de conjuntos pueden caracterizarse en términos de sucesiones convergentes.

PROPOSICIÓN 5.4. *Sean $E \subset \mathbb{C}$ y $w \in \mathbb{C}$. w es un punto de acumulación de E si, y sólo si, existe una sucesión en $E - \{w\}$ que converge hacia w .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que w es punto de acumulación de E . Para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos $z_n \in E - \{w\}$ tal que $|w - z_n| < 1/(n+1)$. Observemos que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $E - \{w\}$, y que $|w - z_n|$ tiende a 0 cuando n tiende a ∞ , por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$. Esto demuestra la ida. Para la vuelta, sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $E - \{w\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|w - z_n| < \varepsilon$; puesto que $z_n \in E - \{w\}$, se tiene que $B_\varepsilon(w)$ contiene un punto de $E - \{w\}$. Luego, w es punto de acumulación de E . \square

El concepto de sucesión de Cauchy aprendido para sucesiones de números reales se extiende a sucesiones complejas, de una manera natural.

DEFINICIÓN 5.5. Sea $\{z_n\}$ una sucesión en \mathbb{C} . Decimos que $\{z_n\}$ es una **sucesión de Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N, |z_m - z_n| < \varepsilon$.

Conocido es que, en el conjunto de los reales con la distancia usual, decir “sucesión convergente” equivale a decir “sucesión de Cauchy”. Esta equivalencia no necesariamente es válida en contextos más generales, pero sí en el campo de los complejos.

PROPOSICIÓN 5.6. *Una sucesión compleja es convergente si, y sólo si, es de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. Para la ida, supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |z_n - L| < \varepsilon/2$. Sean m y n naturales mayores o iguales que N . Entonces, $|z_n - z_m| \leq |z_n - L| + |L - z_m| < \varepsilon$, por lo que $\{z_n\}$ es sucesión de Cauchy.

Recíprocamente, sea $\{z_n\}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} , con $z_n = x_n + iy_n$. Veamos que $\{x_n\}$ es también de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe N tal que para todos $m, n \geq N$, $|z_m - z_n| < \varepsilon$. Como $|z_m - z_n| \geq |x_m - x_n|$, se tiene que $\forall m, n \geq N, |x_m - x_n| < \varepsilon$. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de números reales, por lo que existe $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Análogamente, $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} , por lo que existe $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Entonces $\{z_n\}$ converge a $x + iy \in \mathbb{C}$ (Prop. 5.3). \square

Si $\{z_n\}$ es una sucesión compleja y designamos por E_N al conjunto $\{w \in \mathbb{C} : \exists n \geq N : w = z_n\}$, resulta directo que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy si, y sólo si, $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{diam}(E_N) = 0$.

1.1. Álgebra de sucesiones. Supongamos que $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son dos sucesiones de números complejos. Con ellas, se pueden definir las siguientes sucesiones:

- La **sucesión suma** de $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ es la sucesión en la que el n -ésimo término es $z_n + w_n$.
- La **sucesión producto** de $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ es la sucesión en la que el n -ésimo término es $z_n w_n$.
- La **sucesión cociente** de $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ es la sucesión en la que el n -ésimo término es z_n/w_n . Obviamente, para que esté bien definida, necesitamos que $w_n \neq 0$ para todo n .

Tiene sentido preguntarse si existe el límite de las sucesiones arriba definidas cuando existen individualmente los límites de las sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$.

PROPOSICIÓN 5.7. Sean $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ dos sucesiones convergentes de números complejos. Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \right)\end{aligned}$$

Si, además, es $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos cómo demostrar la propiedad del producto, siendo las otras análogas. Sea $z_n = x_n + iy_n$, $w_n = u_n + iv_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x + iy$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = u + iv$. Tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ (prop. 5.3). Es $z_n w_n = (x_n u_n - y_n v_n) + i(x_n v_n + y_n u_n)$. Por propiedades de convergencia de sucesiones reales, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n u_n - y_n v_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) - (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n) = xu - yv$, y, análogamente, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n v_n + y_n u_n) = xv + yu$. Dado que $z_n w_n$ tiene parte real $x_n u_n - y_n v_n$ y parte imaginaria $x_n v_n + y_n u_n$, se tiene que $z_n w_n$ es una sucesión de complejos cuya sucesión de partes reales converge a $xu - yv$ y cuya sucesión de partes imaginarias converge a $xv + yu$. Entonces, por prop. 5.3, $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = (xu - yv) + i(xv + yu) = (x + iy)(u + iv) = (\lim_{n \rightarrow \infty} z_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} w_n)$. \square

1.2. Subsucesiones. Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión compleja. Consideremos una sucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ estrictamente creciente de números naturales, es decir, $n_k < n_{k+1}$ para todo k . Con estas dos sucesiones, podemos definir una nueva sucesión $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{C} haciendo $w_k = z_{n_k}$. La sucesión $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ se llama **subsucesión** de $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y se denota mediante $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Si $\{z_{n_k}\}$ converge a L , es decir, si $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = L$, entonces L se llama **punto de acumulación** de $\{z_n\}$. Observar que para todo $k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq k$.

OBSERVACIÓN 5.8. Un hecho que usaremos frecuentemente en las demostraciones que siguen es que un subconjunto de números naturales es infinito si, y sólo si, es no acotado.

TEOREMA 5.9. Una sucesión $\{z_n\}$ converge hacia L si, y sólo si, cualquiera de sus subsucesiones converge hacia L .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\{z_n\}$ converge a L , y sea $\{z_{n_k}\}$ una subsucesión. Hay un N tal que $\forall n \geq N, |z_n - L| < \varepsilon$. Luego, si $k \geq N$, será $n_k \geq n_N \geq N$, por lo que $|z_{n_k} - L| < \varepsilon$. La vuelta es trivial, ya que $\{z_n\}$ es subsucesión de sí misma. \square

PROPOSICIÓN 5.10. *Sea $\{z_n\}$ una sucesión compleja, y sea L un número complejo. L es punto de acumulación de $\{z_n\}$ si, y sólo si, cualquier entorno de L posee infinitos términos de $\{z_n\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que L es un punto de acumulación de $\{z_n\}$. Hay una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = L$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq N, z_{n_k} \in B_\varepsilon(L)$. Como cada término de la subsucesión es un término de $\{z_n\}$, se tiene que $B_\varepsilon(L)$ contiene una cantidad infinita de términos de $\{z_n\}$.

Recíprocamente, supongamos que todo entorno de L posee una cantidad infinita de términos de $\{z_n\}$. Elijamos n_0 tal que $|L - z_{n_0}| < 1$. Ahora elijamos $n_1 > n_0$ tal que $|L - z_{n_1}| < 1/2$. Tal elección es posible, pues si hacemos $I = \{n \in \mathbb{N} : z_n \in B_{1/2}(L)\}$, por la hipótesis I es infinito, y entonces es no acotado (observ. 5.8), de donde debe existir un n_1 mayor que n_0 en I . Continuando de esta manera, para cada $k > 1$ debe existir un $n_k > n_{k-1}$ tal que $|L - z_{n_k}| < 1/(k+1)$. Se tiene que $\{z_{n_k}\}$ es subsucesión de $\{z_n\}$ y que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = L$, lo que demuestra la suficiencia de la condición. \square

Es fácil construir sucesiones con una cantidad finita de puntos de acumulación, y queda de ejercicio construir una que tenga infinitos. En cualquier caso, los puntos de acumulación de una sucesión dada forman un conjunto cerrado.

TEOREMA 5.11. *Dada la sucesión compleja $\{z_n\}$, el conjunto de sus puntos de acumulación es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por E al conjunto de puntos de acumulación de $\{z_n\}$. Sea q un punto de acumulación de E . Veamos que $q \in E$. Sea $w_0 \in E - \{q\}$ tal que $|q - w_0| < 1/2$. Sea z_{n_0} un término de la sucesión $\{z_n\}$ tal que $|w_0 - z_{n_0}| < 1/2$. Tenemos entonces que $|q - z_{n_0}| \leq |q - w_0| + |w_0 - z_{n_0}| < 1$. Elijamos ahora $w_1 \in E - \{q\}$ tal que $|w_1 - q| < 1/4$, y n_1 tal que $n_1 > n_0$ y $|w_1 - z_{n_1}| < 1/4$. Tal elección es posible, pues, siendo w_1 un punto de acumulación de $\{z_n\}$, hay una subsucesión infinita de $\{z_n\}$ que converge a w_1 . Se tiene que $|q - z_{n_1}| \leq |q - w_1| + |w_1 - z_{n_1}| < 1/2$. Continuando de esta manera, para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $w_k \in E - \{q\}$ tal que $|q - w_k| < 1/(2k+2)$ y sea $n_k > n_{k-1}$ tal que $|w_k - z_{n_k}| < 1/(2k+2)$. Se tendrá entonces que $\{z_{n_k}\}$ es subsucesión de $\{z_n\}$ convergiendo a q , pues $|q - z_{n_k}| \leq |q - w_k| + |w_k - z_{n_k}| < 1/(k+1)$, por lo que $q \in E$. \square

TEOREMA 5.12. *Sea $K \subset \mathbb{C}$. K es compacto si, y sólo si, cualquier sucesión en K tiene un punto de acumulación en K .*

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow Sea $\{z_n\} \subset K$ y sea E su campo de variabilidad.

Si E es finito, debe haber un punto $p \in E$ y una sucesión infinita $\{n_k\}$ de naturales tales que $n_0 < n_1 < \dots$ y $z_{n_k} = p$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\{z_{n_k}\}$ es subsucesión de $\{z_n\}$ y converge hacia $p \in E \subset K$, por lo que p es un punto de acumulación de $\{z_n\}$.

Si E es infinito, tiene un punto de acumulación p en K (teor. 2.29). Sea n_0 tal que $|p - z_{n_0}| < 1$. Elijamos n_1 tal que $n_1 > n_0$ y $|p - z_{n_1}| < 1/2$ (tal elección es posible pues hay una cantidad infinita de m tales que $|p - z_m| < 1/2$). Continuando de esta manera, para cada $k \in \mathbb{N}$ elijamos n_k tal que $n_k > n_{k-1}$ y $|p - z_{n_k}| < 1/(k+1)$. Entonces $\{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{z_n\}$ que converge a p , de donde p es punto de acumulación de $\{z_n\}$.

\Leftarrow Aplicaremos el teorema 2.29. Sea E un subconjunto infinito de K . Elijamos cualquier $z_0 \in E$ y para cada $n \geq 1$ elijamos $z_n \in E - \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ (tal elección es posible pues E es infinito). Hemos construido una sucesión en E (y, por lo tanto, en K) que, por hipótesis, tiene un punto de acumulación $L \in K$. Por proposición 5.10, dado cualquier $r > 0$, el conjunto $A = \{n : z_n \in B_r(L)\}$ es infinito y, por la construcción de $\{z_n\}$, se puede elegir $n \in A$ de modo que $z_n \neq L$. Luego, $z_n \in B_r^*(L) \cap E$. Entonces, E tiene un punto de acumulación en K . \square

1.3. Continuidad sucesional. Si $\{z_n\}$ es una sucesión compleja en E , y f es función de E en \mathbb{C} , entonces $\{f(z_n)\}$ es otra sucesión compleja. Tiene sentido preguntarse si puede decirse algo acerca de su convergencia, conociendo la de $\{z_n\}$.

EJEMPLO 5.13.

1. Si $z_n = (-1)^n$ y $f(z) = i$, $\{z_n\}$ no es convergente pero $\{f(z_n)\}$ sí, pues es una sucesión constante.
2. Sea $z_n = (-1)^n/(n+1)$ y

$$f(z) = \begin{cases} i & \text{si } \operatorname{Re} z \geq 0 \\ -i & \text{si } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

$\{z_n\}$ es convergente a 0, mientras que $\{f(z_n)\}$ no converge pues tiene dos puntos de acumulación, que son i y $-i$.

□

TEOREMA 5.14. Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, supongamos que a es punto de acumulación de D , y sea $L \in \mathbb{C}$. Se tiene que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$ si, y sólo si, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = L$ para toda sucesión $\{z_n\}$ en $D - \{a\}$ que converja a a .

DEMOSTRACIÓN. Para la ida, supongamos que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = L$. Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $D - \{a\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0 : 0 < |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$. Correspondiente a ese $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |z_n - a| < \delta$. Luego, si $n \geq N$, se tiene que $|f(z_n) - L| < \varepsilon$, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = L$.

Para la vuelta, supongamos que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \neq L$. Entonces existe $\varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists z \in D$ tal que $0 < |z - a| < \delta$ pero $|f(z) - L| \geq \varepsilon$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe z_n tal que $0 < |z_n - a| < 1/(n+1)$ pero $|f(z_n) - L| \geq \varepsilon$. Ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0$, tenemos que $\{z_n\}$ es una sucesión en $D - \{a\}$ que converge a a . Sin embargo, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \neq L$. □

COROLARIO 5.15. Si f es continua en a y $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$.

2. Series de números complejos

Sea $\{z_j\}_{j \geq 0}$ una sucesión de números complejos. La **serie infinita de números complejos** correspondiente a esa sucesión se define a través del símbolo

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_j = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$$

que involucra la suma de una cantidad infinita de complejos y, por lo tanto, no tiene significado por sí sola. Para asignarle un sentido a la serie, definimos, en base a la sucesión $\{z_j\}_{j \geq 0}$, otra sucesión compleja $\{S_n\}_{n \geq 0}$ en la que $S_n = \sum_{j=0}^n z_j$. La sucesión $\{S_n\}_{n \geq 0}$ se llama **sucesión de sumas parciales de $\{z_j\}_{j \geq 0}$** . En caso de converger la sucesión de sumas parciales a un número complejo S , se dice que **la serie $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ converge a S** , y escribimos $\sum_{j=0}^{\infty} z_j = S$; es decir,

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} z_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n z_j,$$

lo que significa que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, \left| \sum_{j=0}^n z_j - S \right| < \varepsilon$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ no existe (ya sea por oscilar o por ser infinito), la serie se dice **divergente**.

Si z_j está definido al menos para todo $j \geq j_0$, la expresión $\sum_{j=j_0}^{\infty} z_j$, con j_0 no necesariamente 0, equivale naturalmente a $\sum_{j=0}^{\infty} z_{j+j_0}$.

El criterio de Cauchy para convergencia de sucesiones puede adaptarse para estudiar convergencia de series. En efecto, dada una sucesión numérica cualquiera $\{S_n\}$, es casi inmediato demostrar que la misma es de Cauchy si, y sólo si, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1 : \forall m \geq n \geq N, |S_m - S_{n-1}| < \varepsilon$. Si $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ es una serie numérica compleja y S_n su n -ésima suma parcial, para $m \geq n \geq 1$ es $S_m - S_{n-1} = \sum_{j=n}^m z_j$. Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 5.16. *Una serie compleja $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ es convergente si, y sólo si, $\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall m \geq n \geq N, \left| \sum_{j=n}^m z_j \right| < \varepsilon$.*

Dicho intuitivamente, sin importar cuántos términos se sumen a partir del N que corresponde a cada ε , el módulo de esa suma no superará a ε .

Si $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ es convergente y particularizamos la proposición 5.16 al caso $m = n$, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N, |z_n| < \varepsilon$. Obtenemos así una condición necesaria de convergencia que nos debe sonar familiar de nuestro conocimiento de las series de números reales, y que resumimos en el siguiente enunciado.

PROPOSICIÓN 5.17. *Si una serie compleja converge, su término general tiende a 0.*

Por supuesto que la condición no es suficiente, como lo muestra la consideración de la serie armónica $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$, cuya divergencia es conocida.

Analizamos a continuación un importante ejemplo de series numéricas complejas.

EJEMPLO 5.18. Sea z_0 un número complejo. Consideremos la *serie geométrica* $\sum_{j=0}^{\infty} z_0^j$. Por inducción en n , se puede ver que $\sum_{j=0}^n z_0^j = \frac{1-z_0^{n+1}}{1-z_0}$. Entonces, si $|z_0| < 1$, la serie converge a $\frac{1}{1-z_0}$ pues, en este caso, z_0^{n+1} tiende a 0 cuando n tiende a infinito.

Si $|z_0| \geq 1$, la serie diverge pues, para todo $j \geq 0, |z_0^j| = |z_0|^j \geq 1$, y no se cumple la condición necesaria de convergencia de la serie dada por la proposición 5.17. \square

2.1. Álgebra de series. Dadas dos series complejas $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} w_j$, la **serie suma** de ambas es la serie que tiene por término general la suma de los términos generales de ambas. Si k es una constante compleja y $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ es una serie, podemos también definir naturalmente otra serie cuyo j -ésimo término es kz_j . El siguiente resultado establece la esperable relación entre la convergencia de las series individuales y la de la suma y producto por una constante.

PROPOSICIÓN 5.19. *Sean $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} w_j$ dos series convergentes, y sea k una constante compleja. Entonces,*

$$\sum_{j=0}^{\infty} (z_j + w_j) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j + \sum_{j=0}^{\infty} w_j \qquad \sum_{j=0}^{\infty} kz_j = k \sum_{j=0}^{\infty} z_j$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{S_n\}$, $\{T_n\}$ y $\{U_n\}$ las sucesiones de sumas parciales de $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$, $\sum_{j=0}^{\infty} w_j$ y de $\sum_{j=0}^{\infty} (z_j + w_j)$, respectivamente. Notemos que $U_n = S_n + T_n$. Ya que $\{S_n\}$ y $\{T_n\}$ son ambas convergentes, $\{U_n\}$ es también convergente, y converge a $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ (Prop. 5.7). Entonces, $\sum_{j=0}^{\infty} (z_j + w_j) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j + \sum_{j=0}^{\infty} w_j$. De manera similar se demuestra lo referido a $\sum_{j=0}^{\infty} kz_j$. \square

2.2. Convergencia absoluta. Una serie $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ se dice **absolutamente convergente** si es convergente la serie $\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|$. La serie $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ se dice **condicionalmente convergente** si es una serie convergente pero no converge absolutamente. Por ejemplo, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} (i/2)^j$ es absolutamente convergente (pues $\sum_{j=0}^{\infty} |(i/2)^j| = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$ converge) mientras que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$ es condicionalmente convergente (el criterio de Leibniz para series de términos alternados muestra que la serie converge, mientras que $\sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^j}{j} \right|$ es la divergente serie armónica).

Como pasa con las series de números reales, convergencia absoluta implica convergencia.

PROPOSICIÓN 5.20. *Toda serie absolutamente convergente es una serie convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ una serie compleja absolutamente convergente. Veremos que cumple con la condición de convergencia establecida en la Prop. 5.16. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|$ converge, hay un N tal que para todos $m \geq n \geq N, \sum_{j=n}^m |z_j| < \varepsilon$. Entonces, para todos $m \geq n \geq N$, se tiene que $\left| \sum_{j=n}^m z_j \right| \leq \sum_{j=n}^m |z_j| < \varepsilon$. \square

2.3. Criterios de convergencia de series. Como consecuencia de los criterios de convergencia de series de números reales, tenemos criterios para establecer la convergencia de series de números complejos.

■ Criterios de comparación:

1. Sean $\{z_j\}$ y $\{w_j\}$ tales que existe un N_0 tal que $\forall j \geq N_0, |z_j| \leq |w_j|$. Supongamos también que $\sum_{j=0}^{\infty} |w_j|$ converge. Entonces $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ converge absolutamente. (La convergencia de $\sum_{j=0}^{\infty} w_j$ no permite la conclusión; por ejemplo, tomar $z_j = 1/(2j)$ y $w_j = (-1)^j/j$.)
2. Sean $\{z_j\}$ y $\{w_j\}$ tales que existe un N_0 tal que $\forall j \geq N_0, |z_j| \geq |w_j|$. Supongamos también que $\sum_{j=0}^{\infty} |w_j|$ diverge. Entonces $\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|$ diverge. (Pero $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ puede converger; por ejemplo, tomar $z_j = 2(-1)^j/j$ y $w_j = 1/j$.)

■ Criterio del cociente (D'Alembert): Supongamos que existe $L = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{j+1}}{z_j} \right|$. Entonces:

1. Si $L < 1$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ converge absolutamente.
2. Si $L > 1$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ diverge.
En efecto, tomando β tal que $1 < \beta < L$, existe N tal que $\forall j \geq N, |z_{j+1}/z_j| > \beta$, de donde se deduce que $0 < \beta|z_N| < |z_{N+1}| < |z_{N+2}| < \dots$. No se cumple entonces la condición necesaria de convergencia establecida en la prop. 5.17.
3. Si $L = 1$, no podemos decir nada por este criterio. Las series $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ tienen ambas $L = 1$, siendo la primera divergente y la segunda convergente.

■ Criterio de la raíz (Cauchy): Supongamos que existe $L = \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|z_j|}$. Entonces:

1. Si $L < 1$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ converge absolutamente.
2. Si $L > 1$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ diverge.
En efecto, tomando β tal que $1 < \beta < L$, existe N tal que $\forall j \geq N, \sqrt[j]{|z_j|} > \beta$, de donde $|z_j| > \beta^j > 1$. No se cumple entonces la condición necesaria de convergencia establecida en la prop. 5.17.
3. Si $L = 1$, no podemos decir nada por este criterio. Las mismas series $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ lo demuestran.

3. Sucesiones y series funcionales

Nuestro objetivo es estudiar series de potencias, que son las de la forma $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ con z_0 y los c_j números complejos establecidos, y z se considera variable compleja. En tales series, el j -ésimo término depende no sólo de j (como en una serie compleja común) sino también de z . Una serie de potencias puede verse entonces como una expresión del tipo $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ con $f_j(z) = c_j(z - z_0)^j$. Una serie del tipo $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ se llama **serie funcional** pues el j -ésimo término es una función de z , con el agregado de que a distintos j pueden corresponderles distintas funciones. Como vemos, implícitamente estamos considerando una familia de funciones $\{f_j(z)\}_{j \geq 0}$, es decir, estamos suponiendo que tenemos definida una función $f_j(z)$ para cada $j \geq 0$. Tal familia de funciones se llama una **sucesión funcional**.

DEFINICIÓN 5.21. Sea $D \subset \mathbb{C}$. Una **sucesión funcional en D** es una familia de funciones $\{f_j(z)\}_{j \geq 0}$ de manera que a cada $j \geq 0$ corresponde una función $f_j : D \rightarrow \mathbb{C}$. La **serie funcional** asociada a la familia $\{f_j(z)\}_{j \geq 0}$ es la serie $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$, definida para cada $z \in D$ en los que la serie converge.

De manera análoga a las sucesiones y series numéricas, a veces consideraremos sucesiones y series funcionales definidas para j a partir de un j_0 fijo.

EJEMPLO 5.22. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$. Consideremos la sucesión $\{f_j(z)\}_{j \geq 1}$ con $f_j(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{j}$. Tenemos que, por ejemplo, $f_2(3/4) = 3/8$, $f_{10}(3/4) = 3/40$, $f_{10}(1/11) = 1/110$. \square

EJEMPLO 5.23. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$. Consideremos la sucesión $\{g_j(z)\}_{j \geq 1}$ con $g_j(z) = (\operatorname{Re} z)^j$. Tenemos que, por ejemplo, $g_j(0) = 0$ y $g_j(1) = 1$ para todo j . \square

EJEMPLO 5.24. Sea $D = \mathbb{C}$. Consideremos la serie funcional $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$. Del ejemplo 5.18, sabemos que converge para todo z que tenga módulo menor que 1, y diverge en cualquier otro caso. \square

Remarquemos que las funciones que componen una sucesión funcional pueden ser de índole muy distinta entre sí. Además, una serie funcional puede converger para algunos valores de z y divergir para otros. De hecho, el criterio del cociente establece que si hacemos $r(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{j+1}(z)}{f_j(z)} \right|$, la serie convergerá para todos los z que hagan $r(z) < 1$ y divergirá para aquellos que hagan $r(z) > 1$.

Conviene primero estudiar características generales de las sucesiones funcionales para luego estudiar las de series funcionales y finalmente particularizar para series de potencias, en las que las funciones involucradas son todas de tipo polinómico.

3.1. Convergencia puntual de sucesiones funcionales. Dada la sucesión funcional $\{f_j(z)\}$ definida en $D \subset \mathbb{C}$, si fijamos $z_0 \in D$, queda establecida la sucesión compleja $\{f_j(z_0)\}$. Para el ejemplo 5.22, la sucesión que corresponde a $z_0 = 1$ es $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ (convergente a 0), mientras que en el ejemplo 5.23, la sucesión que corresponde a $z_0 = 1/2$ es $\{1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$ (convergente a 0) y la que corresponde a $z_0 = 1$ es $\{1, 1, 1, \dots\}$ (convergente a 1).

Supongamos que para todo $z_0 \in D$, $\{f_j(z_0)\}$ es una sucesión compleja convergente. Es decir, supongamos que para todo z_0 en D , existe $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z_0)$. Tal límite dependerá, en general, de z_0 . Tiene sentido entonces definir una nueva función f de D en \mathbb{C} : la **función límite de la sucesión funcional** $\{f_j(z)\}$, dada por $f(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z)$. Cuando existe tal función, se dice que la sucesión funcional $\{f_j(z)\}$ **converge puntualmente a $f(z)$** .

Para nuestro ejemplo 5.22, se tiene que para todo $z \in [0, 1]$, $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{z}{j} = 0$, por lo que la función límite de esta sucesión funcional es $f(z) = 0$ para todo $z \in [0, 1]$. Para el ejemplo 5.23, se tiene que si $z \in [0, 1)$, es $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} z^j = 0$, mientras que $\lim_{j \rightarrow \infty} 1^j = 1$. La función límite es, en este caso, la dada por

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 1 \\ 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

El término *puntual* se refiere a que $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z)$ existe para cada punto de D . Esto significa que

$$\forall z \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall j \geq N, |f_j(z) - f(z)| < \varepsilon$$

En general, tal N dependerá de ε y también de z .

Cabe preguntarse qué características hereda la función límite de las funciones que componen la sucesión. Por ejemplo, si todas las f_j son continuas, ¿será que la función límite es también continua? Nuestros ejemplos anteriores muestran que no podemos decir nada. Sin embargo, veremos a continuación un tipo de convergencia más fuerte, que, en caso de ocurrir, garantiza que la función límite hereda ciertas propiedades.

3.2. Convergencia uniforme de sucesiones funcionales. Decimos que la sucesión funcional $\{f_j(z)\}_{j \geq 0}$ definida en $D \subset \mathbb{C}$ **converge uniformemente a $f(z)$ en D** si satisface que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall z \in D, \forall j \geq N, |f_j(z) - f(z)| < \varepsilon$$

Como vemos, aquí estamos pidiendo que N dependa sólo de ε , es decir que, fijado ε , el mismo N sirva para todo z del subconjunto en el que ocurre la convergencia. Resulta directo ver que si una sucesión funcional converge uniformemente en D , entonces converge puntualmente para cada $z \in D$.

Para el caso en que D sea un subconjunto de \mathbb{R} y las funciones de la sucesión sean a valores reales (llamémosles $f_j(x)$), hay un criterio gráfico sencillo para decidir si la sucesión funcional

converge uniformemente a una función real $f(x)$ dada: en un par de ejes cartesianos, trácese la gráfica de $f(x)$ y, para $\varepsilon > 0$, gráfiquense $f(x) + \varepsilon$ y $f(x) - \varepsilon$ (es decir, trasládese hacia arriba y hacia abajo la gráfica de $f(x)$ una distancia ε). Si la convergencia es uniforme, seremos capaces de encontrar un N tal que la gráfica de todas las $f_j(x)$ con $j \geq N$ están íntegramente entre las curvas correspondientes a $f(x) - \varepsilon$ y $f(x) + \varepsilon$ cuando x varía en D . Si es posible verificar esto para cualquier ε , entonces la convergencia de $\{f_j(x)\}$ a $f(x)$ es uniforme en D . En el ejemplo 5.22 tenemos convergencia uniforme, no así en el ejemplo 5.23 (analizar lo que ocurre en las cercanías de $x = 1$).

Veamos un criterio útil para ver si una sucesión funcional converge uniformemente en un conjunto. El mismo establece que las sucesiones numéricas que se obtienen al reemplazar a la variable por los números complejos de ese conjunto, son *uniformemente de Cauchy*.

TEOREMA 5.25. *La sucesión de funciones complejas $\{f_j(z)\}$ definidas en $D \subset \mathbb{C}$ converge uniformemente en D si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todos $m, n \geq N$ y todo $z \in D$, $|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la ida, llamemos $f(z)$ a la función límite. Sea $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme, existe N tal que para todo $j \geq N$ y todo $z \in D$, es $|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon/2$, de modo que $|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ para todos $m, n \geq N$ y todo $z \in D$.

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todos $m, n \geq N$ y todo $z \in D$, $|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$. Si tomamos $z_0 \in D$, tenemos que $\{f_j(z_0)\}$ es una sucesión de Cauchy de números complejos, y entonces converge a un límite que llamaremos $f(z_0)$ (Prop. 5.6). Esto permite ver que $\{f_j(z)\}$ converge puntualmente a una función $f(z)$ en D . Resta ver que la convergencia es uniforme. Sea $\varepsilon > 0$, y elijamos N de modo que $\forall m, n \geq N, \forall z \in D$, $|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon/2$. Sean $n \geq N$ y $z \in D$, y elijamos $m \geq N$ tal que $|f(z) - f_m(z)| < \varepsilon/2$ (lo cual es posible ya que $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(z) = f(z)$). Entonces,

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

verificándose así la convergencia uniforme en D . □

Como hemos anunciado, hay muchas propiedades interesantes de la función límite cuando la convergencia es uniforme.

PROPOSICIÓN 5.26. *Sean $\{f_j(z)\}$ y $\{g_j(z)\}$ sucesiones de funciones complejas definidas en $D \subset \mathbb{C}$ que convergen uniformemente en D a $f(z)$ y $g(z)$, respectivamente. Sea $h(z)$ una función compleja definida en D y de módulo acotado superiormente en D . Entonces, las sucesiones funcionales $\{f_j(z) + g_j(z)\}$ y $\{h(z)f_j(z)\}$ convergen uniformemente en D a $f(z) + g(z)$ y $h(z)f(z)$, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. En cuanto a la suma, sea $\varepsilon > 0$. Existe $N_1 \geq 0$ tal que para todo $j \geq N_1$ y todo $z \in D$, es $|f(z) - f_j(z)| < \varepsilon/2$. Similarmente, existe $N_2 \geq 0$ tal que para todo $j \geq N_2$ y todo $z \in D$, es $|g(z) - g_j(z)| < \varepsilon/2$. Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, si $j \geq N$ y $z \in D$, es $|f(z) - f_j(z)| < \varepsilon/2$ y $|g(z) - g_j(z)| < \varepsilon/2$, de donde

$$|(f(z) + g(z)) - (f_j(z) + g_j(z))| \leq |f(z) - f_j(z)| + |g(z) - g_j(z)| < \varepsilon$$

En relación al producto por una función acotada, sea M una cota superior positiva para $|h(z)|$ en D . Sea $\varepsilon > 0$. Existe N tal que $\forall j \geq N, \forall z \in D$, $|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon/M$. Luego, para todo $j \geq N$ y todo $z \in D$, es

$$|h(z)f_j(z) - h(z)f(z)| = |h(z)| |f_j(z) - f(z)| \leq M |f_j(z) - f(z)| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

□

PROPOSICIÓN 5.27. *Supongamos que $\{f_j(z)\}$ converge uniformemente a $f(z)$ en $D \subset \mathbb{C}$. Si las $f_j(z)$ son continuas en D , $f(z)$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z_0 \in D$, y $\varepsilon > 0$. Debemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $z \in D$ y $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Por la convergencia uniforme en D , existe N tal que $\forall z \in D, |f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ (en particular, $|f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3$). Además, ya que $f_N(z)$ es continua en z_0 , existe $\delta > 0$ tal que si $z \in D$ y $|z - z_0| < \delta$, es $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3$. Entonces, si $z \in D$ y $|z - z_0| < \delta$, tenemos que

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Luego, $f(z)$ es continua en z_0 , y ya que z_0 es arbitrario en D , se sigue que $f(z)$ es continua en D . \square

PROPOSICIÓN 5.28. Sean \mathcal{C} un contorno en \mathbb{C} y $\{f_j(z)\}$ una sucesión de funciones complejas continuas sobre \mathcal{C} . Supongamos que las $f_j(z)$ convergen uniformemente a $f(z)$ en \mathcal{C} . Entonces, $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} f_j(z)dz$.

DEMOSTRACIÓN. Debemos ver que $\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall j \geq N, \left| \int_{\mathcal{C}} f_j(z)dz - \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| < \varepsilon$. Llamemos L a la longitud de \mathcal{C} . Sea $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme, hay un N tal que para todo $j \geq N$ y todo $z \in \mathcal{C}$, es $|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon/(2L)$. Luego, $\forall j \geq N$ se tiene que

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f_j(z)dz - \int_{\mathcal{C}} f(z)dz \right| = \left| \int_{\mathcal{C}} (f_j(z) - f(z))dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{2L} L < \varepsilon$$

\square

PROPOSICIÓN 5.29. Sea $\{f_j(z)\}$ una sucesión de funciones complejas analíticas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Supongamos además que la sucesión funcional converge uniformemente a $f(z)$ en D . Entonces, $f(z)$ es analítica en D , y $f'(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f'_j(z)$ para todo $z \in D$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $z_0 \in D$, y tomemos $r > 0$ tal que el entorno $G = B_{2r}(z_0)$ esté contenido en D . Por medio del Teorema de Morera (teor. 4.29), veremos que $f(z)$ es analítica en G . Siendo cada $f_j(z)$ analítica en D , y por lo tanto continua en G , $f(z)$ es continua en G (prop. 5.27). Sea \mathcal{C} un contorno cerrado en G . Por el Teorema de Cauchy-Goursat, $\int_{\mathcal{C}} f_j(z)dz = 0$ para todo j . Luego, por la proposición 5.28, $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} f_j(z)dz = 0$, por lo cual f es analítica en G (y, en particular, en z_0).

Sea \mathcal{C}_r la circunferencia con centro z_0 y radio r , y $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$. Se tiene que $D_r \subset G$, por lo que $f(z)$ es analítica en D_r , así como $f_j(z)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, por la convergencia uniforme, existe N tal que para todo $j \geq N, |f_j(z) - f(z)| < \varepsilon r/2$ para todo $z \in \mathcal{C}_r$. Entonces, si $j \geq N$, por la desigualdad de Cauchy (prop. 4.30) con $n = 1$ para la función $f_j(z) - f(z)$, es

$$|f'_j(z_0) - f'(z_0)| \leq \frac{\varepsilon r}{2r} < \varepsilon$$

por lo que $\lim_{j \rightarrow \infty} f'_j(z_0) = f'(z_0)$.

Como z_0 se eligió arbitrariamente en D , se tiene el resultado. \square

3.3. Convergencia uniforme de series funcionales. Decimos que una serie funcional compleja $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ en $D \subset \mathbb{C}$ si la sucesión funcional de sumas parciales $\left\{ \sum_{j=0}^n f_j(z) \right\}_{n \geq 0}$ converge uniformemente a $f(z)$ en D .

Ciertas propiedades que hemos deducido para las sucesiones funcionales uniformemente convergentes se extienden con facilidad a series funcionales uniformemente convergentes.

PROPOSICIÓN 5.30. Supongamos que $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ y $\sum_{j=0}^{\infty} g_j(z)$ convergen uniformemente en $D \subset \mathbb{C}$, a $f(z)$ y $g(z)$ respectivamente. Supongamos también que $h(z)$ es una función de módulo acotado superiormente en D . Entonces, $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) + g_j(z)$ y $\sum_{j=0}^{\infty} h(z)f_j(z)$ convergen en D uniformemente a $f(z) + g(z)$ y $h(z)f(z)$, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Sean $S_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z)$ y $T_n(z) = \sum_{j=0}^n g_j(z)$. Por hipótesis, $\{S_n(z)\}$ y $\{T_n(z)\}$ convergen en D uniformemente a $f(z)$ y $g(z)$, respectivamente, de modo que, por prop. 5.26, $\{S_n(z) + T_n(z)\}$ converge uniformemente en D a $f(z) + g(z)$. Ya que $S_n(z) + T_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z) + g_j(z)$, se tiene entonces que $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) + g_j(z)$ converge uniformemente a $f(z) + g(z)$.

Para probar la otra afirmación, observemos que, por prop. 5.26, se tiene que $\{h(z)S_n(z)\}$ converge uniformemente a $h(z)f(z)$ en D . Siendo $h(z)S_n(z) = \sum_{j=0}^n h(z)f_j(z)$, tenemos que $\sum_{j=0}^{\infty} h(z)f_j(z)$ converge uniformemente a $h(z)f(z)$ en D . \square

PROPOSICIÓN 5.31. *Supongamos que $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ converge uniformemente en D a $f(z)$. Si las $f_j(z)$ son continuas en D , $f(z)$ también lo es, y $\forall z_0 \in D \cap D'$, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z)$. Por hipótesis, $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$, y la convergencia es uniforme en D . Por ser suma finita de funciones continuas en D , cada $S_n(z)$ es continua en D . Entonces $f(z)$ es continua en D (Prop. 5.27). Si $z_0 \in D \cap D'$, por continuidad de f en z_0 , es $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z_0)$. \square

PROPOSICIÓN 5.32. *Supongamos que $\{f_j(z)\}$ es una sucesión de funciones complejas continuas sobre un contorno \mathcal{C} , y que $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ converge uniformemente en \mathcal{C} . Entonces,*

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) \right) dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_j(z) dz$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $S_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z)$. Cada $S_n(z)$ es continua en \mathcal{C} , y por hipótesis $\{S_n(z)\}$ converge uniformemente en D , digamos a $f(z)$. Entonces, por prop. 5.28 y por linealidad de integrales para sumas finitas de funciones, se tiene:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} S_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} \sum_{j=0}^n f_j(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \int_{\mathcal{C}} f_j(z) dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_j(z) dz$$

\square

PROPOSICIÓN 5.33. *Sea $\{f_j(z)\}$ una sucesión de funciones complejas analíticas en D , y supongamos que $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ en D . Entonces, $f(z)$ es analítica en D , y $f'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f'_j(z)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z)$. Cada $S_n(z)$ es analítica en D por ser suma finita de funciones analíticas en D , y, por hipótesis, $\{S_n(z)\}$ converge uniformemente a $f(z)$ en D . Entonces, por prop. 5.29, $f(z)$ es analítica en D , y además, por regla de derivación para sumas finitas de funciones, se tiene:

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n f'_j(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f'_j(z)$$

\square

El siguiente criterio nos da una condición suficiente para la convergencia uniforme de una serie.

TEOREMA 5.34. (**Criterio de Weierstrass**) *Sea $\{M_j\}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ es convergente. Sea $\{f_j(z)\}$ una sucesión de funciones complejas definidas en $D \subset \mathbb{C}$. Si para todo $j \geq 0$ y todo $z \in D$ se tiene que $|f_j(z)| \leq M_j$, entonces $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ converge uniformemente en D . Además, para cada $z \in D$, $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ converge absolutamente.*

DEMOSTRACIÓN. La convergencia absoluta de la serie en cualquier $z \in D$ se deduce directamente del criterio de comparación. Sea $\{S_n(z)\}$ la sucesión funcional de sumas parciales correspondiente a la serie funcional. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ converge, existe N tal que para todos $m \geq n \geq N$, $\sum_{j=n}^m M_j < \varepsilon$ (Prop 5.16). Entonces, para cualquier $m \geq n \geq N$ y $z \in D$ es $|S_m(z) - S_n(z)| = \left| \sum_{j=n+1}^m f_j(z) \right| \leq \sum_{j=n+1}^m |f_j(z)| \leq \sum_{j=n}^m |f_j(z)| \leq \sum_{j=n}^m M_j < \varepsilon$. Luego, la sucesión funcional de sumas parciales cumple con la condición para convergencia uniforme dada en el Teorema 5.25, por lo que la serie funcional converge uniformemente en D . \square

EJEMPLO 5.35. La serie funcional $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ converge uniformemente en $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, donde R es cualquier real no negativo menor que 1. En efecto, basta tomar $M_j = R^j$ y aplicar el criterio de Weierstrass, ya que para todo $z \in D_R$, es $|z|^j \leq R^j$ y $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ converge.

Por un argumento similar, se puede ver que $\sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j$ (que converge para todo z tal que $|z - z_0| < 1$) es uniformemente convergente en cualquier disco con centro z_0 y radio $R < 1$. \square

EJEMPLO 5.36. Sea R un real positivo, y a un complejo tal que $|a| < R$. Hagamos $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$. Entonces, la serie funcional $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^j$ converge uniformemente en D .

En efecto, tomemos $r > 0$ tal que $|a| < r < R$. Entonces, para cualquier $z \in D$, es $|a/z| < r/R$, por lo que, para cualquier $j \geq 0$ y cualquier $z \in D$, es $|a/z|^j \leq (r/R)^j$. Denominando $M_j = (r/R)^j$, se tiene que $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ es convergente pues se trata de una serie geométrica con razón $r/R < 1$. Luego, se satisface el criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^j$ en D .

Por un argumento similar, puede verse que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a - z_0}{z - z_0} \right)^j$$

converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq R\}$ toda vez que R es real positivo y $|a - z_0| < R$. \square

4. Series de potencias. Series de Taylor

Como anticipamos, las series de potencias son series funcionales complejas de la forma $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$ en donde los c_j y z_0 son números complejos, y z se interpreta como una variable compleja. El complejo z_0 se denomina **centro del desarrollo en serie**, y se dice que el desarrollo en serie es **alrededor de** z_0 .

Si j_0 es un entero no negativo fijo, la expresión $\sum_{j=j_0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ corresponde naturalmente a la serie de potencias $\sum_{j=0}^{\infty} d_j(z - z_0)^j$ con $d_j = 0$ para $j < j_0$ y $d_j = c_j$ para $j \geq j_0$. (Para el caso en que $j_0 < 0$, esperemos al próximo capítulo.)

EJEMPLO 5.37. La serie funcional $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ (ejemplo 5.24) es una serie de potencias con centro en $z_0 = 0$ y coeficiente $c_j = 1$ para todo j . \square

EJEMPLO 5.38. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^j}{j} (z + 3 - 4i)^j$ es la serie de potencias con centro en $z_0 = -3 + 4i$ y coeficientes $c_j = \frac{i^j}{j}$. \square

EJEMPLO 5.39. $\sum_{j=0}^{\infty} 3^j(i - 2z)^j$ es la serie de potencias con centro en $z_0 = i/2$ y coeficientes $c_j = (-6)^j$. Para llegar a esta conclusión, se debe observar que, tal como la serie está escrita, todavía resta algún trabajo algebraico para encontrar el centro y los coeficientes. Dicho trabajo es el siguiente:

$$\sum_{j=0}^{\infty} 3^j(i - 2z)^j = \sum_{j=0}^{\infty} 3^j \left((-2) \left(z - \frac{i}{2} \right) \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} 3^j (-2)^j \left(z - \frac{i}{2} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-6)^j \left(z - \frac{i}{2} \right)^j$$

\square

Debe quedar perfectamente claro que en la expresión $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$, c_j es el factor complejo que multiplica a la potencia j -ésima de $z-z_0$; además, c_j no puede depender de z . El siguiente ejemplo advierte algo en relación a estas consideraciones.

EJEMPLO 5.40. Encontremos el centro y los coeficientes c_j de la serie de potencias

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j}{j+1} (z+3-4i)^{j+2}$$

Es claro que $z_0 = -3+4i$; sin embargo, el j -ésimo coeficiente de la serie no es $c_j = \frac{i^j}{j+1}$, pues ése es el coeficiente que multiplica a $(z-z_0)^{j+2}$. Tampoco podemos decir que el j -ésimo coeficiente es $c_j = \frac{i^j}{j+1}(z-z_0)^2$ (como podría ocurrirnos al expresar a la serie como $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{i^j}{j+1}(z+3-4i)^2 \right) (z+3-4i)^j$), pues en tal caso c_j dependería de z , lo que no puede ser. Para encontrar el coeficiente j -ésimo, observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j}{j+1} (z+3-4i)^{j+2} &= \frac{i^0}{1} (z-z_0)^2 + \frac{i^1}{2} (z-z_0)^3 + \frac{i^2}{3} (z-z_0)^4 + \cdots \\ &= 0 + 0(z-z_0)^1 + \frac{i^0}{1} (z-z_0)^2 + \frac{i^1}{2} (z-z_0)^3 + \frac{i^2}{3} (z-z_0)^4 + \cdots \end{aligned}$$

de donde se ve que

$$c_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < 2 \\ \frac{i^{j-2}}{j-1} & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

□

Como el j -ésimo término de una serie de potencias es $f_j(z) = c_j(z-z_0)^j$, hagamos

$$r(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{j+1}(z)}{f_j(z)} \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{j+1}}{c_j} \frac{(z-z_0)^{j+1}}{(z-z_0)^j} \right| = |z-z_0| \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{j+1}}{c_j} \right|$$

Sabemos que, por el criterio del cociente, la serie convergerá absolutamente para cualquier z que satisfaga $r(z) < 1$. Esa desigualdad se cumple cuando $|z-z_0| < \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j}{c_{j+1}} \right|$, de modo que la serie converge para todo z en el interior de un círculo de centro z_0 y radio $R = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j}{c_{j+1}} \right|$. El mencionado círculo se denomina **círculo de convergencia de la serie**, y la cantidad R es el **radio de convergencia de la serie**. El radio de convergencia de una serie puede ser 0 (lo que significa que la serie converge sólo cuando $z = z_0$), ∞ (lo que significa que la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$) o algún número real positivo.

Investiguemos ahora qué tipo de convergencia posee una serie de potencias en el interior del círculo de convergencia.

LEMA 5.41. *Supongamos que la serie $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ converge cuando se reemplaza a z por algún complejo z_1 . Sea r cualquier real no negativo menor que $|z_1-z_0|$, y designemos por D_r al círculo con centro z_0 y radio r junto a su interior. Entonces, la serie converge uniformemente en D_r , y la convergencia es absoluta para todo $z \in D_r$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que la proposición es trivial si $z_1 = z_0$, veamos el caso $z_1 \neq z_0$. Hagamos $p = \frac{r}{|z_1-z_0|}$, que satisfará $0 < p < 1$.

Como $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z_1-z_0)^j$ es convergente por hipótesis, debe ser $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j(z_1-z_0)^j = 0$ (prop. 5.17). Es decir, la sucesión $\{c_j(z_1-z_0)^j\}$ es una sucesión convergente, y, por lo tanto, acotada. Entonces existe $m \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $j \geq 0$, $|c_j(z_1-z_0)^j| \leq m$.

Tomemos z satisfaciendo $|z-z_0| \leq r$. Observemos que para todo $j \geq 0$ es

$$|c_j(z-z_0)^j| = |c_j||z-z_0|^j \left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right|^j \leq m \left| \frac{r}{z_1-z_0} \right|^j = mp^j$$

Designemos entonces $M_j = mp^j$. Observemos que $\sum_{j=0}^{\infty} M_j = \sum_{j=0}^{\infty} mp^j = m \sum_{j=0}^{\infty} p^j$ que es convergente pues $|p| < 1$. Por lo tanto, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ satisface las condiciones del criterio de Weierstrass (Teor. 5.34) y converge absoluta y uniformemente en D_r . \square

TEOREMA 5.42. *Cualquier serie de potencias $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ converge a una función analítica $f(z)$ en el interior de su círculo de convergencia, y $f'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} jc_j(z - z_0)^{j-1}$ para todo z en dicho conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea R el radio de convergencia de la serie. Tomemos cualquier complejo w en el interior del círculo de convergencia, resultando $|w - z_0| < R$, y elijamos r y r_1 tales que $|w - z_0| < r < r_1 < R$. Tomemos cualquier complejo z_1 a distancia r_1 de z_0 . Nótese que z_1 también está en el interior del círculo de convergencia, y entonces $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z_1 - z_0)^j$ converge. Sea D_r el círculo con centro en z_0 y radio r , incluido su interior. Como $r < |z_1 - z_0|$, $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ converge uniformemente en D_r (Lema 5.41), y ya que para todo j es $c_j(z - z_0)^j$ una función entera, por prop. 5.33 se tiene que $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ converge a una función analítica en D_r (en particular en w), y que $f'(w) = \sum_{j=0}^{\infty} jc_j(w - z_0)^{j-1}$. Ya que w es arbitrario en el interior del círculo de convergencia de la serie, se sigue el resultado. \square

OBSERVACIÓN 5.43. Sea R el radio de convergencia de $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$, y $f(z)$ la función analítica a la cual la serie converge en su círculo de convergencia. El teorema anterior garantiza que $f'(z)$ posee desarrollo en serie de potencias en ese mismo conjunto, siendo $f'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} jc_j(z - z_0)^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} jc_j(z - z_0)^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)c_{j+1}(z - z_0)^j$. El radio de convergencia de ese desarrollo es

$$R' = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{(j+1)c_{j+1}}{(j+2)c_{j+2}} \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j+1}{j+2} \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{j+1}}{c_{j+2}} \right| = R$$

es decir, es el mismo que el de la serie de $f(z)$. Aplicando el teorema 5.42 y el razonamiento anterior sucesivamente, llegamos a la conclusión de que para $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ con radio de convergencia R , cualquier derivada $f^{(n)}(z)$ tiene representación en serie de potencias con centro z_0 con igual radio de convergencia R y expresión dada por

$$f^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) \cdots (j-n+1) c_j(z - z_0)^{j-n}$$

El teorema 5.42 establece que una serie de potencias, en el interior de su círculo de convergencia, converge a una función analítica. Nos interesa ahora saber si hay un recíproco de este resultado, es decir, si una dada función analítica en cierta región, admite desarrollo en serie de potencias allí. La respuesta la da el siguiente Teorema de Taylor.

TEOREMA 5.44. (Desarrollo en serie de Taylor) *Sea $f(z)$ una función analítica en el interior de un círculo \mathcal{C} con centro en z_0 y radio $R > 0$. Entonces existe una serie de potencias $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ que converge a $f(z)$ en cada punto del interior de \mathcal{C} . Es decir, para todo $z \in \mathcal{C}$ que satisfaga $|z - z_0| < R$, se tiene que $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$. Los coeficientes del desarrollo están dados por $c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea z_1 un complejo en el interior de \mathcal{C} , siendo $0 \leq |z_1 - z_0| < R$. Elijamos r tal que $|z_1 - z_0| < r < R$. Sea \mathcal{C}_r el círculo con centro en z_0 y radio r . Nótese que \mathcal{C}_r está en el interior de \mathcal{C} . Se tiene que $f(z)$ es analítica sobre y dentro de \mathcal{C}_r y que z_1 es un punto interior a dicho círculo. Luego, es de aplicación la fórmula integral de Cauchy. Por lo tanto,

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z - z_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0) - (z_1 - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0) \left(1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}\right)} dz$$

Ya que $f(z)$ es analítica en \mathcal{C}_r , tiene módulo acotado por alguna constante M . Luego, para todo $z \in \mathcal{C}_r$, es $\left| \frac{f(z)}{z-z_0} \right| \leq \frac{M}{r}$. Además, según vimos en el ejemplo 5.36, $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0} \right)^j$ converge uniformemente a $\frac{1}{1-\frac{z_1-z_0}{z-z_0}}$ en \mathcal{C}_r . De allí que, por las proposiciones 5.32 y 5.30, tenemos que

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z-z_0) \left(1 - \frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \left(\frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0} \right)^j \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} \left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0} \right)^j \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z-z_0} \left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0} \right)^j dz \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{j+1}} dz \right) (z_1-z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z_1-z_0)^j \end{aligned}$$

en donde en el paso final hemos usado la fórmula generalizada de Cauchy. Hemos demostrado entonces que para cualquier z_1 en el interior del círculo de convergencia, $f(z_1)$ se puede expresar como $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z_1-z_0)^j$ con c_j independiente de z_1 y valiendo $\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$. \square

Antes de ver ejemplos de desarrollos en serie de Taylor, estableceremos algunas propiedades adicionales de los mismos relativas a la unicidad de la representación en serie y a la región de validez del desarrollo obtenido.

TEOREMA 5.45. *Si $f(z)$ es analítica en el interior de un círculo \mathcal{C} con centro en z_0 , la serie de Taylor de $f(z)$ dada por el Teorema 5.44 es la única serie de potencias de $z-z_0$ que converge a $f(z)$ en ese dominio.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sum_{j=0}^{\infty} d_j (z-z_0)^j$ una serie de potencias de $z-z_0$ que converge a $f(z)$ en el interior de \mathcal{C} . Es decir, para todo z interior a \mathcal{C} es $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j (z-z_0)^j$. Según la observación 5.43, tenemos que $f^{(n)}(z) = \sum_{j=n}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-n+1)d_j (z-z_0)^{j-n}$. Evaluando en z_0 , el único término de la serie que queda es el correspondiente a $j=n$, resultando que $f^{(n)}(z_0) = d_n n(n-1)\cdots 1$, y entonces $d_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Es decir, d_n es necesariamente el n -ésimo coeficiente en el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$ con centro en z_0 . \square

TEOREMA 5.46. *Sea $f(z)$ analítica en z_0 , y $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-z_0)^j$ el correspondiente desarrollo en serie de Taylor. Entonces, el mayor círculo centrado en z_0 dentro del cual la serie converge a $f(z)$ es el mayor círculo con centro en z_0 dentro del cual $f(z)$ es analítica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $R = \inf\{|z_s - z_0| : z_s \text{ es singularidad de } f\}$. El Teorema de Taylor garantiza que la serie converge a $f(z)$ en el interior del círculo con centro z_0 y radio R . Si R' se elige mayor que R , sea z_s una singularidad de f tal que $|z_s - z_0| < R'$. Supongamos que el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$ con centro en z_0 convergiera a $f(z)$ para todo punto del interior del círculo con centro en z_0 y radio R' . Por Teorema 5.42, tendríamos que $f(z)$ es analítica en todo punto interior al círculo de radio R' con centro en z_0 . En particular, $f(z)$ sería analítica en z_s . Contradicción. \square

Los desarrollos en serie de Taylor en los que $z_0 = 0$ se denominan **desarrollos en serie de McLaurin**. A efectos prácticos, será conveniente tener presentes los desarrollos en serie de McLaurin que se dan a continuación, obtenidos en base al Teorema de Taylor.

EJEMPLO 5.47. Sea $f(z) = e^z$. Sabemos que es una función entera, así que su desarrollo en serie de McLaurin valdrá para todo el plano complejo. Como $f^{(j)}(0) = 1$ para cualquier $j \geq 0$, se tiene que $e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. \square

EJEMPLO 5.48. Sea $f(z) = \cos z$. Como es una función entera, su desarrollo en serie de McLaurin valdrá para todo el plano complejo. Si derivamos sucesivamente a $f(z)$, obtenemos el

ciclo $\cos z, -\sin z, -\cos z, \sin z, \dots$. Luego, $f^{(j)}(0)$ vale $(-1)^{j/2}$ si j es par, y 0 si j es impar. Entonces, $\cos z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. \square

EJEMPLO 5.49. Sea $f(z) = \frac{1}{1-z}$. La única singularidad de $f(z)$ es 1, de modo que su desarrollo en serie de McLaurin valdrá para todo z que satisfaga $|z| < 1$. Las derivadas sucesivas son $\frac{1}{(1-z)^2}, \frac{2}{(1-z)^3}, \frac{6}{(1-z)^4}, \dots, \frac{j!}{(1-z)^{j+1}}, \dots$ por lo que $f^{(j)}(0) = j!$ para cualquier $j \geq 0$. De allí que $\frac{1}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j$, válido para $|z| < 1$. \square

Se debe notar que el Teorema de Taylor garantiza la posibilidad de desarrollar en serie, pero no siempre es fácil calcular los coeficientes de un desarrollo a través de la fórmula dada por el teorema. En muchos casos, conviene apelar a otras técnicas que se basan generalmente en el uso de funciones simples cuyo desarrollo en serie es conocido; a modo de ilustración, nótese que el desarrollo de $\frac{1}{1-z}$ del ejemplo anterior podría haberse obtenido también teniendo presente nuestras consideraciones sobre las series geométricas (ejemplo 5.18).

4.1. Ceros de una función analítica. Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Un **cero** de f es un número complejo z_0 tal que $f(z_0) = 0$. Un cero z_0 de f se dice **aislado** si existe un entorno reducido alrededor de él en el cual f no posee ceros.

TEOREMA 5.50. Sea $f(z)$ una función analítica en z_0 , y supongamos que z_0 es un cero de f . Entonces o bien z_0 es un cero aislado de f o bien existe un entorno $B_r(z_0)$ tal que $f(z) = 0$ para todo $z \in B_r(z_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Por ser f analítica en z_0 , existe un desarrollo en serie de Taylor de f alrededor de z_0 , $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$, válido para un entorno $B_\varepsilon(z_0)$. Dado que $f(z_0) = 0$, debe ser $c_0 = 0$. Si todos otros los c_j fuesen 0, la proposición es cierta pues para todo $z \in B_\varepsilon(z_0)$, $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} 0(z-z_0)^j = 0$. Si no todos los c_j son 0, sea m el menor entero positivo tal que $c_m \neq 0$. Entonces, para todo $z \in B_\varepsilon(z_0)$, es

$$f(z) = c_m(z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + c_{m+2}(z-z_0)^{m+2} + \dots = (z-z_0)^m (c_m + c_{m+1}(z-z_0) + \dots)$$

Hagamos $\phi(z) = c_m + c_{m+1}(z-z_0) + c_{m+2}(z-z_0)^2 + \dots$, notando que $\phi(z_0) = c_m \neq 0$. Además, $\phi(z)$ es una serie de potencias alrededor de z_0 que converge en todo punto de $B_\varepsilon(z_0)$ (a c_m en z_0 y a $\frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$ en $z \neq z_0$). Luego $\phi(z)$ es analítica en z_0 (Teor. 5.42), y, por tanto, ϕ es continua en z_0 . De allí que, por prop. 3.26, existe $r > 0$ tal que $\phi(z) \neq 0$ para todo punto de $B_r(z_0)$. Como $f(z) = (z-z_0)^m \phi(z)$, se tiene que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in B_r(z_0) - \{z_0\}$. \square

El entero positivo m que aparece en la demostración anterior sugiere la siguiente definición.

Sea z_0 un cero aislado de una función $f(z)$ analítica en z_0 . z_0 es un **cero de orden m para $f(z)$** si existe un entorno B alrededor de z_0 y una función $\phi(z)$ analítica en z_0 tales que $\phi(z_0) \neq 0$ y $f(z) = (z-z_0)^m \phi(z)$ para todo $z \in B$. Un cero de orden 1 se denomina **cero simple** de $f(z)$.

El concepto de orden de un cero no aislado de una función analítica es una generalización del concepto de multiplicidad de una raíz de una función polinómica (de hecho, el orden de un cero de una función polinómica es su multiplicidad). De la misma demostración del Teorema 5.50, puede verse que el orden de z_0 es el menor de los enteros positivos cuyo correspondiente coeficiente en el desarrollo en serie de f alrededor de z_0 es distinto de 0. Por esto mismo, ya que $c_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$, el orden de z_0 es el menor entero positivo m tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Esto proporciona una herramienta útil para encontrar el orden de un cero: derivar sucesivamente y evaluar en z_0 hasta obtener un resultado distinto de 0.

4.2. Cambio de centro. Prolongación analítica. Muchas veces, se tiene el desarrollo en serie de una función alrededor de z_0 , e interesa *cambiar el centro del desarrollo*, es decir, obtener un desarrollo válido para la misma función pero alrededor de otro punto en el interior del círculo de convergencia. Lógicamente, los coeficientes de este nuevo desarrollo pueden no

ser los mismos que en el desarrollo alrededor de z_0 , pero el siguiente resultado muestra cómo calcular, al menos en teoría, los nuevos coeficientes en base a los originales.

PROPOSICIÓN 5.51. Sea $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0 con radio de convergencia R , y sea z_1 un punto en el interior del círculo de convergencia. Entonces, $f(z)$ tiene un desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_1 dado por $\sum_{j=0}^{\infty} d_j(z-z_1)^j$ con $d_j = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!j!} (z_1-z_0)^{k-j}$, y dicho desarrollo es válido en el disco $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_1| < R - |z_1-z_0|\}$.

DEMOSTRACIÓN. Como el desarrollo en serie alrededor de z_0 es válido en z_1 , se tiene que $f(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1-z_0)^k$, $f'(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k(z_1-z_0)^{k-1}$, y, en general, $f^{(j)}(z_1) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k k(k-1)\dots(k-j+1)(z_1-z_0)^{k-j}$, de donde $d_j = \frac{f^{(j)}(z_1)}{j!} = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!j!} (z_1-z_0)^{k-j}$. Como el disco D_1 está contenido íntegramente en el círculo de convergencia, en el cual f es analítica, el desarrollo $\sum_{j=0}^{\infty} d_j(z-z_1)^j$ vale para todo $z \in D_1$. \square

Sean D_1 y D_2 dos dominios tales que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, y $f_1(z)$ una función analítica en D_1 . Puede interesarnos la búsqueda de una función $f_2(z) : D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ que sea analítica en D_2 y tal que, restringida a $D_1 \cap D_2$, coincida con f_1 , es decir, que $\forall z \in D_1 \cap D_2$, $f_2(z) = f_1(z)$. De existir tal función, se llamará una **prolongación analítica de f_1 en el dominio D_2** . La función $F : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \in D_1 \\ f_2(z) & \text{si } z \in D_2 \end{cases}$$

se denomina **prolongación analítica de f_1 y f_2 en el dominio $D_1 \cup D_2$** , y f_1 y f_2 se llaman **elementos de F** . El desarrollo en serie de Taylor proporciona una técnica para buscar prolongaciones analíticas, según veremos ahora. En efecto, sea z_0 un punto de D_1 . Ya que f_1 es analítica en z_0 , admite una representación $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ válida para un disco con centro z_0 y radio R igual a la distancia desde z_0 hasta la singularidad de f_1 más próxima a z_0 . Sea z_1 tal que $|z_1-z_0| < R$. f_1 es analítica en z_1 , y por lo tanto admite una representación $\sum_{j=0}^{\infty} d_j(z-z_1)^j$. Según la Proposición 5.51, ese desarrollo convergerá al menos en el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_1| < R - |z_1-z_0|\}$, pero en muchos casos su radio de convergencia R' será mayor, de modo que si hacemos $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_1| < R'\}$ y en él definimos $f_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j(z-z_1)^j$, resulta $f_2(z)$ una prolongación analítica de f_1 en D_2 .

EJEMPLO 5.52. Sea $f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ con $z_0 = 0$ y $c_j = 1$ para todo $j \geq 0$. Sabemos que $R = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{c_j}{c_{j+1}} \right| = 1$. Escojamos el punto $z_1 = \frac{1-i}{2}$. Aplicando la Proposición 5.51, se tiene que

$$d_j = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k!}{(k-j)!j!} \left(\frac{1-i}{2} \right)^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!j!} \left(\frac{1-i}{2} \right)^k = \frac{1}{\left(1 - \frac{1-i}{2}\right)^{j+1}} = \left(\frac{2}{1+i} \right)^{j+1}$$

(hemos usado que el desarrollo en serie de Taylor de $\frac{1}{(1-z)^N}$ alrededor de 0 es $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+N-1)!}{k!(N-1)!} z^k$) y el radio de convergencia de $\sum_{j=0}^{\infty} d_j(z-z_1)^j$ es $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego, $f_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{1+i} \right)^{j+1} \left(z - \frac{1-i}{2} \right)^j$ es una prolongación analítica de $f_1(z)$ en el disco $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1-i}{2} \right| < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$. \square

EJERCICIOS

1. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series de números complejos:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(in)}{3^n}$

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in^2)}{5n^2}$

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$

vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{senh}(in)}$

vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(i\frac{\pi}{n})}{n^{\ln n}}$

2. Encontrar la región de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-3+i}{1-i}\right)^n & \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{i}{n}\right) z^n & \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2} \\ \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} & \text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sinh^n(n+i)} & \end{array}$$

3. Encontrar por definición los coeficientes del desarrollo en serie de McLaurin de las funciones e^z , $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ y $\frac{1}{1-z}$, indicando el radio de convergencia.
4. Aplicando desarrollos en serie de Taylor de funciones conocidas, encontrar el desarrollo de las siguientes funciones alrededor del complejo z_0 especificado. Indicar radio de convergencia.

$$\begin{array}{lll} \text{i)} e^{z^2} & (z_0 = 0) & \text{ii)} \cos z \quad (z_0 = -\frac{\pi}{4}) & \text{iii)} \frac{1}{1-3z}, \quad (z_0 = 0) \\ \text{iv)} \frac{1}{z} & (z_0 = 2+i) & \text{v)} \operatorname{sen}(2z+1) \quad (z_0 = 0) \end{array}$$

5. Por derivación o integración término a término del desarrollo en serie de alguna función analítica conocida, obtener el desarrollo en serie de McLaurin de las siguientes funciones, indicando el radio de convergencia:

a) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^N}$ para los casos $N = 2$ y $N = 3$. Generalizar para cualquier $N > 0$, y usar el resultado para obtener:

- 1) el desarrollo en serie de Taylor de $\frac{1}{z^5}$ en potencias de $(z-1)$.
- 2) el desarrollo en serie de McLaurin de $\frac{1}{(1+z)^N}$, $N > 0$.

b) $f(z) = \operatorname{Ln}(2-z)$

6. Multiplicando o dividiendo series, encontrar algunos términos del desarrollo en serie de Taylor de $\frac{1}{2+\operatorname{sen} z}$, $\operatorname{Ln}(\cos z)$ y $e^{\frac{1}{1-z}}$ alrededor del origen. Determinar el radio de convergencia.

7. Descomponer en fracciones simples para obtener el desarrollo en serie de Taylor alrededor de 0 de las funciones $\frac{1}{(z-1)(z+i)}$, $\frac{1}{(z-i)(z+1)^2}$ y $\frac{z+1}{(z-2)^3}$. Especificar el radio de convergencia.

8. Hallar los ceros de las siguientes funciones, y determinar sus órdenes:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} z^4 + 4z^2 & \text{ii)} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{iii)} z^3 \operatorname{sen} z \\ \text{iv)} 1 + \cosh z & \text{v)} \cos z^3 & \text{vi)} (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z}) \end{array}$$

9. Hallar el orden del cero $z_0 = 0$ para las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \operatorname{sen}^2 \frac{z}{2}} & \text{ii)} e^{\operatorname{sen} z} - e^{\tan z} & \text{iii)} z^2 (e^{z^2} - 1) \end{array}$$

10. Sea f analítica en un dominio D , y sea $A = \{z \in D : f(z) = 0\}$. Mostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) A tiene un punto de acumulación en D .
- b) Existe un punto $z_0 \in D$ tal que $f^{(k)}(z_0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- c) f vale constantemente 0 en D .

Usando estas equivalencias, deduzca:

- i) Si f es constante en algún entorno contenido en D , entonces f es constante en D .
- ii) El *Principio de Identidad*: si dos funciones analíticas en un dominio D coinciden en algún subconjunto de D que tiene un punto de acumulación en D , entonces dichas funciones coinciden en todo D .

(Sugerencia: Para $a \Rightarrow b$, muestre que ese punto de acumulación pertenece a A y, en consecuencia, es un cero no aislado para f . Observe entonces el correspondiente desarrollo en serie de Taylor. Para $b \Rightarrow c$, observe que f vale 0 en algún $B_r(z_0)$; suponga que existe $w \in D$ tal que $f(w) \neq 0$. Hay una poligonal P en D desde z_0 hasta w . Sea Z el subconjunto de puntos de P en que f tiene un cero no aislado, y $N = P - Z$. Cada punto de N admite un entorno tal que, en el correspondiente entorno reducido, f no se anula, y cada punto de Z admite un entorno en que f se anula. Las respectivas uniones de esos entornos muestran que P no es conexa.)

SERIES DE LAURENT. TEOREMA DE LOS RESIDUOS

En el capítulo anterior, hemos considerado desarrollos en series de potencias alrededor de un complejo z_0 , asumiendo implícitamente que las potencias de $z - z_0$ son *no negativas*. Investigaremos ahora qué consecuencias tiene considerar la posibilidad de que aparezcan potencias negativas en una expresión de desarrollo en serie. Veremos cómo, gracias a esto, podremos ampliar la posibilidad de desarrollar, en ciertas regiones, una función f en serie (de potencias enteras) con centro en z_0 *sin el requisito de analiticidad de f en z_0* , y exploraremos interesantes resultados para el caso en que z_0 es una singularidad aislada de la función. Esto nos proporcionará herramientas alternativas para integrar funciones complejas, y también para obtener integrales de funciones de variable real que, con nuestros conocimientos de cálculo básico, serían muy complicadas, cuando no imposibles.

1. Desarrollos en series de Laurent

DEFINICIÓN 6.1. Una **sucesión bi-infinita** de números complejos es una función z de \mathbb{Z} en \mathbb{C} , y se denota por $\{z_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Una **serie bi-infinita** es una expresión de la forma $\sum_{j=-\infty}^{\infty} z_j$, que representa a $\sum_{j=1}^{\infty} z_{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} z_j$, y es convergente cuando ambas series infinitas convergen. La serie bi-infinita se dice **absolutamente convergente** si lo son cada una de esas series infinitas.

Si $D \subset \mathbb{C}$ y para cada $j \in \mathbb{Z}$ está definida una función $f_j : D \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que $\{f_j(z)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es una **sucesión funcional bi-infinita**. Una **serie funcional bi-infinita** es una expresión de la forma $\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(z)$. Si la misma converge absolutamente para cada $z \in D$, y además $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ y $\sum_{j=1}^{\infty} f_{-j}(z)$ convergen ambas uniformemente en D , decimos que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(z)$ **converge uniformemente en D** .

Una **serie de Laurent con centro en z_0** es una serie funcional bi-infinita de la forma $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$, en donde z_0 es un complejo (fijo) y $\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión compleja bi-infinita.

En base a las definiciones precedentes, resulta fácil extender, a series funcionales bi-infinitas, las operaciones con series funcionales infinitas establecidas por las proposiciones 5.30, 5.31, 5.32 y 5.33.

PROPOSICIÓN 6.2. *Supongamos que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(z)$ y $\sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j(z)$ convergen uniformemente en $D \subset \mathbb{C}$, a $f(z)$ y $g(z)$ respectivamente. Supongamos también que $h(z)$ es una función de módulo acotado superiormente en D . Entonces:*

1. $\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(z) + g_j(z)$ y $\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(z)f_j(z)$ convergen en D uniformemente a $f(z) + g(z)$ y $h(z)f(z)$, respectivamente.
2. Si las $f_j(z)$ son continuas en D , $f(z)$ también lo es, y, para cualquier contorno \mathcal{C} en D , $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_j(z)dz$.
3. Si las $f_j(z)$ son analíticas en D , $f(z)$ es analítica en D , y $f'(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f'_j(z)$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, las series infinitas

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) \quad \sum_{j=1}^{\infty} f_{-j}(z) \quad \sum_{j=0}^{\infty} g_j(z) \quad \sum_{j=1}^{\infty} g_{-j}(z)$$

convergen todas absoluta y uniformemente en D , digamos a $F_1(z)$, $F_2(z)$, $G_1(z)$ y $G_2(z)$ respectivamente, con $F_1(z) + F_2(z) = f(z)$ y $G_1(z) + G_2(z) = g(z)$ para todo z en D .

Lo anterior implica que $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) + \sum_{j=1}^{\infty} f_{-j}(z) + \sum_{j=0}^{\infty} g_j(z) + \sum_{j=1}^{\infty} g_{-j}(z)$ converge uniformemente en D a $F_1(z) + F_2(z) + G_1(z) + G_2(z)$ (prop. 5.30), lo que, por definición, significa que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(z) + g_j(z)$ converge uniformemente en D a $F_1(z) + F_2(z) + G_1(z) + G_2(z)$, es decir, a $f(z) + g(z)$. Además, nuevamente por prop. 5.30, $h(z) \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ y $h(z) \sum_{j=1}^{\infty} f_{-j}(z)$ convergen en D uniformemente a $h(z)F_1(z)$ y $h(z)F_2(z)$, de donde $h(z) \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(z)$ converge uniformemente en D a $h(z)f(z)$. Esto prueba el primer inciso.

Si cada $f_j(z)$ es continua, por prop. 5.31 se deduce que tanto $F_1(z)$ como $F_2(z)$ son continuas en D , de donde $f(z)$ también lo es. Además, para cualquier $\mathcal{C} \subset D$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} F_1(z) dz &= \int_{\mathcal{C}} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_j(z) dz \\ \int_{\mathcal{C}} F_2(z) dz &= \int_{\mathcal{C}} \sum_{j=1}^{\infty} f_{-j}(z) dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_{-j}(z) dz \end{aligned}$$

de donde

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} F_1(z) dz + \int_{\mathcal{C}} F_2(z) dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_j(z) dz + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_{-j}(z) dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_j(z) dz$$

lo que prueba la segunda afirmación.

Si cada $f_j(z)$ es analítica en D , por proposición 5.33 tendremos que $F_1(z)$ y $F_2(z)$ serán analíticas en D , y $F_1'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j'(z)$, $F_2'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{-j}'(z)$. Luego, $f(z)$ es analítica en D , y $f'(z) = F_1'(z) + F_2'(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j'(z)$. \square

Nos interesa saber bajo qué condiciones una función admite desarrollo en serie de Laurent. Deduciremos que cuando una función es analítica en el interior de una corona, admite desarrollo en serie de Laurent en dicho conjunto. Para lo que sigue, si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, denotaremos por $\mathcal{A}(z_0, r_1, r_2)$ al interior de la corona con centro z_0 , radio interior r_1 y radio exterior r_2 , y por $\overline{\mathcal{A}}(z_0, r_1, r_2)$ a su clausura en \mathbb{C} . Es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z_0, r_1, r_2) &= \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\} \\ \overline{\mathcal{A}}(z_0, r_1, r_2) &= \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\} \end{aligned}$$

Comenzamos viendo un análogo al lema 5.41 para series de potencias negativas.

LEMA 6.3. *Supongamos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} c_j(z - z_0)^{-j}$ converge cuando se reemplaza a z por algún complejo $z_1 \neq z_0$. Sea r cualquier real mayor que $|z_1 - z_0|$, y hagamos $E_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq r\}$. Entonces, la serie converge uniformemente en E_r , y la convergencia es absoluta para todo $z \in E_r$.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $p = \frac{|z_1 - z_0|}{r}$, que satisfará $0 < p < 1$.

Como $\sum_{j=1}^{\infty} c_j(z_1 - z_0)^{-j}$ es convergente por hipótesis, debe ser $\lim_{j \rightarrow \infty} c_j(z_1 - z_0)^{-j} = 0$ (prop. 5.17). Es decir, la sucesión $\{c_j(z_1 - z_0)^{-j}\}$ es una sucesión convergente, y, por lo tanto, acotada. Entonces existe $m \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $j \geq 1$, $|c_j(z_1 - z_0)^{-j}| \leq m$.

Tomemos z satisfaciendo $|z - z_0| \geq r$. Observemos que para todo $j \geq 1$ es

$$|c_j(z - z_0)^{-j}| = \frac{|c_j|}{|z - z_0|^j} \left| \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right|^j \leq m \left| \frac{z_1 - z_0}{r} \right|^j = mp^j$$

Designemos entonces $M_j = mp^j$. Observemos que $\sum_{j=1}^{\infty} M_j = \sum_{j=1}^{\infty} mp^j = m \sum_{j=1}^{\infty} p^j$ que es convergente pues $|p| < 1$. Por lo tanto, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} c_j(z - z_0)^{-j}$ satisface las condiciones del criterio de Weierstrass (Teor. 5.34) y converge absoluta y uniformemente en E_r . \square

Veamos ahora que si una función posee desarrollo en serie de Laurent en el interior de una corona, la serie bi-infinita converge uniformemente en la clausura de cualquier subcorona propiamente contenida.

LEMA 6.4. *Supongamos que $f(z)$ admite desarrollo en serie de Laurent $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ en $D = \mathcal{A}(z_0, r_1, r_2)$. Entonces, dicha serie bi-infinita converge absoluta y uniformemente a $f(z)$ en $\overline{\mathcal{A}}(z_0, \rho_1, \rho_2)$ para ρ_1, ρ_2 cualesquiera satisfaciendo $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, para cualquier $z \in D$, $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$ convergen ambas, y $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j + \sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$.

Sean ρ_1, ρ_2 tales que $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. Tomemos $z_1, z_2 \in D$ cualesquiera tales que $r_1 < |z_1 - z_0| < \rho_1$ y $\rho_2 < |z_2 - z_0| < r_2$. Entonces $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z_2 - z_0)^j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z_1 - z_0)^{-j}$ convergen ambas, de modo que, por lemas 5.41 y 6.3, $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$ convergen uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho_2\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq \rho_1\}$ respectivamente, y por lo tanto, por prop. 5.30, $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j + \sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$ converge uniformemente en $\overline{\mathcal{A}}(z_0, \rho_1, \rho_2)$ a $f(z)$. \square

TEOREMA 6.5. **(Desarrollo en serie de Laurent)** *Sea $f(z)$ analítica en $D = \mathcal{A}(z_0, r_1, r_2)$. Entonces, $f(z)$ admite en D una única representación en serie de Laurent con centro en z_0 . Los coeficientes del desarrollo están dados por $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{j+1}} dw$, en donde \mathcal{C} es cualquier circunferencia con centro z_0 y radio r (con $r_1 < r < r_2$) recorrida en sentido antihorario. La convergencia de la serie bi-infinita a $f(z)$ es absoluta en D , y uniforme en $\overline{\mathcal{A}}(z_0, \rho_1, \rho_2)$ para ρ_1, ρ_2 cualesquiera satisfaciendo $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea z cualquier complejo en D , cumpliéndose entonces que $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Tomemos ρ_1, ρ_2 cualesquiera tales que $r_1 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < r_2$. Designemos por \mathcal{C}_1 a la circunferencia con centro z_0 y radio ρ_1 , por \mathcal{C}_2 a la circunferencia con centro z_0 y radio ρ_2 , y por \mathcal{C} a cualquier circunferencia con centro en z_0 y radio r con $r_1 < r < r_2$, todas con orientación positiva (ver fig. 1).

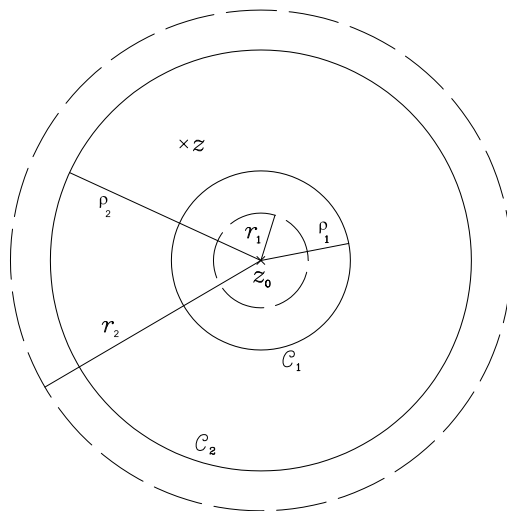


FIGURA 1.

Por corolario 4.21, sabemos que

$$(9) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Desarrollemos por separado las dos integrales del segundo miembro. Para la integral sobre \mathcal{C}_1 , notemos que $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| < 1$ cuando w está sobre \mathcal{C}_1 , por lo que, teniendo presente las proposiciones 5.26 y 5.32 y el ejemplo 5.36, es

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{(w-z_0) - (z-z_0)} dw = - \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{(z-z_0) \left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} dw \\
 &= - \int_{\mathcal{C}_1} \left(\frac{f(w)}{(z-z_0)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^j}{(z-z_0)^j} \right) dw = - \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \frac{(w-z_0)^j}{(z-z_0)^j} dw \\
 &= - \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{C}_1} f(w)(w-z_0)^j dw \right) (z-z_0)^{-j-1} \\
 &= - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{C}_1} f(w)(w-z_0)^{j-1} dw \right) (z-z_0)^{-j} \\
 &= - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{C}} f(w)(w-z_0)^{j-1} dw \right) (z-z_0)^{-j}
 \end{aligned}$$

habiendo usado, para el último paso, el principio de deformación de contornos. Para la otra integral, tendremos en cuenta que si w está sobre \mathcal{C}_2 , es $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| < 1$, de donde

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{(w-z_0) - (z-z_0)} dw = \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{(w-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} dw \\
 &= \int_{\mathcal{C}_2} \left(\frac{f(w)}{(w-z_0)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^j}{(w-z_0)^j} \right) dw = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{j+1}} dw \right) (z-z_0)^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{j+1}} dw \right) (z-z_0)^j
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión (9), resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{j+1}} dw \right) (z-z_0)^j + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{C}} f(w)(w-z_0)^{j-1} dw \right) (z-z_0)^{-j}$$

Para $j \in \mathbb{Z}$, hagamos $c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{j+1}} dw$. Resulta entonces que $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-z_0)^j + \sum_{j=1}^{\infty} c_{-j} (z-z_0)^{-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z-z_0)^j$. Dado que z fue arbitrariamente elegido en D , y que cada c_j es una constante compleja independiente de z , concluimos que $f(z)$ admite en D el desarrollo en serie de Laurent dado por la expresión anterior. Por el lema 6.4, la convergencia de esa serie a $f(z)$ es absoluta y uniforme en $\overline{A}(z_0, \rho_1, \rho_2)$, cualesquiera sean ρ_1, ρ_2 tales que $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$.

Por último, sea $\sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j (z-z_0)^j$ un desarrollo en serie de Laurent para $f(z)$ válido en D . Fijemos r satisfaciendo $r_1 < r < r_2$, y designemos por \mathcal{C}_r a la circunferencia con centro z_0 y radio r con orientación positiva. Del lema 6.4, esta serie bi-infinita converge uniformemente en la clausura de cualquier subcorona de D , y entonces converge uniformemente a $f(z)$ en \mathcal{C}_r . Luego, si m es cualquier entero, para todo $z \in \mathcal{C}_r$ tenemos que

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j (z-z_0)^{j-m-1}$$

pues, en \mathcal{C}_r , $|z - z_0|^{-m-1} = r^{-m-1}$, siendo de aplicación la proposición 6.2. Además, la convergencia es uniforme, por lo que, integrando sobre \mathcal{C}_r , resulta

$$\int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j \int_{\mathcal{C}_r} (z - z_0)^{j-m-1} dz$$

Del ejemplo 4.24, $\int_{\mathcal{C}_r} (z - z_0)^{j-m-1} dz = 0$ a menos que $j = m$, por lo que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j \int_{\mathcal{C}_r} (z - z_0)^{j-m-1} dz = d_m \int_{\mathcal{C}_r} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i d_m$. Entonces, puesto que $\int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = 2\pi i c_m$, concluimos que $d_m = c_m$. Como el entero m se eligió arbitrariamente, queda demostrada la unicidad de la representación. \square

Algunas observaciones sobre los desarrollos en serie de Laurent:

1. En la expresión $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$, la serie infinita $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j} (z - z_0)^{-j}$ se denomina **parte principal del desarrollo**.
2. $f(z)$ debe ser analítica en el interior de la corona, pero no se requiere de la analiticidad de f en z_0 .
3. Si f fuese además analítica en todo el disco $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r_1\}$, tendríamos entonces que, para cualquier $j \leq -1$, $\frac{f(w)}{(w - z_0)^{j+1}}$ sería analítica sobre y dentro de \mathcal{C} , con lo cual, por el Teorema de Cauchy, sería $c_j = 0$ para todo $j < 0$. Entonces el desarrollo en serie de Laurent no tendría potencias negativas de $z - z_0$, y por tanto corresponde al desarrollo en serie de Taylor de f .
4. El desarrollo en serie de Laurent es válido para cuando r_1 es minimal y r_2 es maximal tales que f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Como veremos a través de ejemplos, dada una función y un z_0 , se puede dividir al plano complejo en distintas coronas donde f es analítica, y obtener para cada una de ellas un desarrollo en serie. A distintas regiones les corresponderán distintos coeficientes de desarrollo.
5. La fórmula dada por el Teorema de Laurent para calcular los coeficientes suele no ser la manera más directa para calcularlos. De hecho, como veremos en ejemplos, es usual obtener desarrollos en serie de Laurent a partir de ciertos desarrollos en serie de Taylor.

EJEMPLO 6.6. Desarrollemos en serie de Laurent la función $f(z) = (z - 2i)^{-1}$ con centro en $z_0 = i$, en todas las regiones del plano complejo en que dicha función admita desarrollo.

Primero veamos cuáles son todas las posibles combinaciones de valores de r_1 y r_2 (minimales y maximales, respectivamente) tales que $f(z)$ es analítica en $\mathcal{A}(i, r_1, r_2)$. La función tiene una sola singularidad, correspondiente al complejo $2i$. Por lo tanto, es analítica en $\mathcal{A}(i, 0, 1)$ y $\mathcal{A}(i, 1, \infty)$.

1. Desarrollo válido para $\mathcal{A}(i, 0, 1)$

Cualquier z en este conjunto satisface $|z - i| < 1$, y, en consecuencia, $\left|\frac{z-i}{i}\right| < 1$. Por lo tanto, en esta región, tenemos que

$$\frac{1}{z - 2i} = \frac{1}{(z - i) - i} = -\frac{1}{i} \frac{1}{1 - \frac{z-i}{i}} = i \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{i}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-i)^j}{i^{j-1}}$$

por lo que, para esta región, $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - i)^j$ con

$$c_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < 0 \\ \frac{1}{i^{j-1}} & \text{si } j \geq 0 \end{cases}$$

Notemos que resultó un desarrollo sin potencias negativas, lo cual era de esperarse ya que $f(z)$ es analítica también en z_0 , y, consecuentemente, analítica en todo el interior del círculo con centro i y radio 1.

2. Desarrollo válido para $\mathcal{A}(i, 1, \infty)$

Cualquier z en este conjunto satisface $|z - i| > 1$, y, en consecuencia, $\left|\frac{i}{z-i}\right| < 1$. Por lo tanto, en esta región, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2i} &= \frac{1}{(z-i)-i} = \frac{1}{z-i} \frac{1}{1-\frac{i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \sum_{j=0}^{\infty} i^j (z-i)^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} i^j (z-i)^{-j-1} = \sum_{j=-\infty}^{-1} i^{-j-1} (z-i)^j\end{aligned}$$

Entonces, para esta región, $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z-i)^j$ con

$$c_j = \begin{cases} i^{-j-1} & \text{si } j < 0 \\ 0 & \text{si } j \geq 0 \end{cases}$$

□

EJEMPLO 6.7. Desarrollemos ahora en serie de Laurent la función $f(z) = (z+2i)^{-1}$ con centro en $z_0 = i$, en todas las regiones del plano complejo en que dicha función admita desarrollo.

La función tiene una sola singularidad, correspondiente al complejo $-2i$. Por lo tanto, es analítica en $\mathcal{A}(i, 0, 3)$ y $\mathcal{A}(i, 3, \infty)$.

1. Desarrollo válido para $\mathcal{A}(i, 0, 3)$

Cualquier z en este conjunto satisface $|z - i| < 3$, y, en consecuencia, $\left|-\frac{(z-i)}{3i}\right| < 1$.

Por lo tanto, en esta región, tenemos que

$$\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{3i + (z-i)} = -\frac{1}{3i} \frac{1}{1 - \frac{-(z-i)}{3i}} = -\frac{1}{3i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(3i)^j} (z-i)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(3i)^{j+1}} (z-i)^j$$

por lo que, para esta región, $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z-i)^j$ con

$$c_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < 0 \\ \frac{(-1)^j}{(3i)^{j+1}} & \text{si } j \geq 0 \end{cases}$$

2. Desarrollo válido para $\mathcal{A}(i, 3, \infty)$

Cualquier z en este conjunto satisface $|z - i| > 3$, y, en consecuencia, $\left|\frac{-3i}{z-i}\right| < 1$. Por lo tanto, en esta región, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+2i} &= \frac{1}{(z-i)+3i} = \frac{1}{z-i} \frac{1}{1 + \frac{3i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \sum_{j=0}^{\infty} (-3i)^j (z-i)^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-3i)^j (z-i)^{-j-1} = \sum_{j=-\infty}^{-1} (-3i)^{-j-1} (z-i)^j\end{aligned}$$

Entonces, para esta región, $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z-i)^j$ con

$$c_j = \begin{cases} (-3i)^{-j-1} & \text{si } j < 0 \\ 0 & \text{si } j \geq 0 \end{cases}$$

□

EJEMPLO 6.8. Veamos cómo desarrollar en serie de Laurent la función $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z^2+4)}$ con centro en $z_0 = i$, en todas las regiones del plano complejo en que dicha función admita desarrollo.

En este caso, la función tiene singularidades en i , $2i$ y $-2i$. Así, las coronas maximales con centro z_0 en las que $f(z)$ es analítica son $\mathcal{A}(i, 0, 1)$, $\mathcal{A}(i, 1, 3)$ y $\mathcal{A}(3, \infty)$.

Observemos que

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \frac{z}{z^2+4} = (z-i)^{-1} \frac{z}{z^2+4}$$

La expresión $(z-i)^{-1}$ ya es una potencia de $(z-z_0)$, de modo que la estrategia será desarrollar en serie a $\frac{z}{z^2+4}$ y luego multiplicarla por $(z-i)^{-1}$. Para encontrar ese desarrollo, recurramos a la descomposición en fracciones parciales, debiendo encontrar A y B tales que, para todo z que no anule denominadores,

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{A}{z-2i} + \frac{B}{z+2i}$$

Es decir, $A(z+2i) + B(z-2i) = z$. Como buscamos una identidad en z , haciendo $z = -2i$ obtenemos $B = 1/2$, y haciendo $z = 2i$ obtenemos $A = 1/2$. En efecto, es fácil chequear que

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{1/2}{z-2i} + \frac{1/2}{z+2i}$$

para todo $z \notin \{2i, -2i\}$. Del ejemplo 6.6, ya sabemos cuáles son los desarrollos válidos para $(z-2i)^{-1}$ con centro en i , y, del ejemplo 6.7, los de $(z+2i)^{-1}$ con centro en i , en cada una de las regiones. Usamos esos desarrollos para la función $f(z)$ del ejemplo actual, como sigue:

1. Desarrollo de $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z^2+4)}$ en $\mathcal{A}(i, 0, 1)$. En esta región, tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-i)^{-1} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{i^{j-1}} (z-i)^j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(3i)^{j+1}} (z-i)^j \right) \\ &= (z-i)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i^{j-1}} + \frac{(-1)^j}{2(3i)^{j+1}} \right) (z-i)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i^{j-1}} + \frac{(-1)^j}{2(3i)^{j+1}} \right) (z-i)^{j-1} = \sum_{j=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i^j} + \frac{(-1)^{j+1}}{2(3i)^{j+2}} \right) (z-i)^j \end{aligned}$$

Luego, para esta región, $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z-i)^j$ con

$$c_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < -1 \\ \frac{1}{2i^j} + \frac{(-1)^{j+1}}{2(3i)^{j+2}} & \text{si } j \geq -1 \end{cases}$$

2. Desarrollo de $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z^2+4)}$ en $\mathcal{A}(i, 1, 3)$. En este caso,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-i)^{-1} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{-1} i^{-j-1} (z-i)^j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(3i)^{j+1}} (z-i)^j \right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{i^{-j-1}}{2} (z-i)^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2(3i)^{j+1}} (z-i)^{j-1} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{-2} \frac{i^{-j-2}}{2} (z-i)^j + \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2(3i)^{j+2}} (z-i)^j \end{aligned}$$

Entonces, para esta región, $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z-i)^j$ con

$$c_j = \begin{cases} \frac{i^{-j-2}}{2} & \text{si } j < -1 \\ \frac{(-1)^{j+1}}{2(3i)^{j+2}} & \text{si } j \geq -1 \end{cases}$$

3. Desarrollo de $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z^2+4)}$ en $\mathcal{A}(i, 3, \infty)$. Para esta región, es

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-i)^{-1} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{-1} i^{-j-1} (z-i)^j + \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{-1} (-3i)^{-j-1} (z-i)^j \right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(\frac{i^{-j-1}}{2} + \frac{(-3i)^{-j-1}}{2} \right) (z-i)^{j-1} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{-2} \left(\frac{i^{-j-2}}{2} + \frac{(-3i)^{-j-2}}{2} \right) (z-i)^j \end{aligned}$$

Entonces, para esta región, $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z-i)^j$ con

$$c_j = \begin{cases} \frac{i^{-j-2}}{2} + \frac{(-3i)^{-j-2}}{2} & \text{si } j \leq -2 \\ 0 & \text{si } j \geq -1 \end{cases}$$

□

EJEMPLO 6.9. Desarrollemos

$$f(z) = \frac{1}{z^2} e^{\frac{z+1}{z}}$$

con centro $z_0 = 0$, en todas las partes del plano en que sea posible.

La única singularidad de la función coincide con el centro del desarrollo, así que podemos encontrar una serie de Laurent con centro en 0 para $f(z)$ en $\mathcal{A}(0, 0, \infty)$.

Observemos que

$$e^{\frac{z+1}{z}} = e e^{\frac{1}{z}} = e \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{z} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e}{j!} z^{-j}$$

Por lo tanto,

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e}{j!} z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e}{j!} z^{-j-2} = \sum_{j=-\infty}^{-2} \frac{e}{(-2-j)!} z^j$$

Por lo tanto, en $\mathcal{A}(0, 0, \infty)$, es $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z-i)^j$ con

$$c_j = \begin{cases} \frac{e}{(-2-j)!} & \text{si } j \leq -2 \\ 0 & \text{si } j \geq -1 \end{cases}$$

□

EJEMPLO 6.10. Desarrollemos en serie de Laurent la función $g(z) = (z-2i)^{-2}$ con centro en $z_0 = i$, en todas las regiones del plano complejo en que dicha función admita desarrollo.

Aprovecharemos los desarrollos obtenidos en el ejemplo 6.6, habida cuenta de que, para todo $z \neq 2i$, es $g(z) = -f'(z)$, con $f(z) = (z-2i)^{-1}$. Por lo tanto, para $\mathcal{A}(i, 0, 1)$, tendremos que

$$g(z) = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{i^{j-1}} (z-i)^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} -\frac{j+1}{i^j} (z-i)^j$$

En tanto, para $\mathcal{A}(i, 1, \infty)$, es

$$g(z) = - \sum_{j=-\infty}^{-1} j i^{-j-1} (z-i)^{j-1} = \sum_{j=-\infty}^{-2} (j+1) i^{-j-2} (z-i)^j$$

□

EJEMPLO 6.11. Desarrollemos

$$f(z) = \frac{\text{Ln}(z+2)}{z^3}$$

en serie de Laurent con centro $z_0 = 0$, en todas las zonas del plano en que dicho desarrollo sea posible.

La función dada tiene singularidades en 0 y en todos los complejos que están sobre el eje real desde -2 hacia la izquierda. Por lo tanto, podremos encontrar desarrollo sólo para $\mathcal{A}(0, 0, 2)$ (pues, en cualquier otra corona con centro en 0, $f(z)$ contendrá singularidades).

Notemos que $\text{Ln}(z+2)$ es una primitiva para $(z+2)^{-1}$ en el interior del disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. Por ello, para todo $z \in D$, llamando \mathcal{C}_z a cualquier contorno en D desde 0 hasta z , es

$$(10) \quad \int_{\mathcal{C}_z} \frac{1}{2+\xi} d\xi = \text{Ln}(z+2) - \text{Ln} 2$$

(prop. 4.26, tomando $z_1 = 0$ y $z_2 = z$). Ahora bien, para todo $\xi \in \mathcal{C}_z$, es

$$\frac{1}{2+\xi} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{-\xi}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \xi^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{j+1}} \xi^j$$

Luego, a partir de (10), integrando término a término, resulta

$$\text{Ln}(z+2) = \ln 2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{j+1}} \int_{\mathcal{C}_z} \xi^j d\xi = \ln 2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{j+1}} \frac{z^{j+1}}{j+1}$$

En consecuencia, para todo $z \in \mathcal{A}(0, 0, 2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3} \left(\ln 2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)2^{j+1}} z^{j+1} \right) = z^{-3} \ln 2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)2^{j+1}} z^{j-2} \\ &= z^{-3} \ln 2 + \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+2}}{(j+3)2^{j+3}} z^j \end{aligned}$$

Por lo tanto, en $\mathcal{A}(0, 0, 2)$, es $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j$ donde

$$c_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq -4 \\ \ln 2 & \text{si } j = -3 \\ \frac{(-1)^{j+2}}{(j+3)2^{j+3}} & \text{si } j \geq -2 \end{cases}$$

□

2. Clasificación de singularidades aisladas

Recordemos que z_0 es singularidad aislada para una función $f(z)$ si hay un entorno alrededor de z_0 tal que z_0 es la única singularidad de f en ese entorno. Usaremos los desarrollos en serie de Laurent para hacer una clasificación de las singularidades aisladas que puede tener una función, y para analizar el comportamiento de la función en las cercanías de las mismas, en particular, la existencia de límite.

Veamos algunos ejemplos a este respecto.

EJEMPLO 6.12. Consideremos

$$f(z) = \frac{z-i}{z^2+1}$$

f tiene singularidades en i y en $-i$. Las dos son obviamente singularidades aisladas.

Notar que, para todo $z \neq i$, $f(z)$ se comporta exactamente como la función $1/(z+i)$.

- Aún sin estar definida en i , el límite de f cuando z tiende a i existe y vale $\frac{1}{2i}$, porque $1/(z+i)$ es continua en i .

Por otro lado, obtengamos el desarrollo en serie de Laurent para f con centro i en $\mathcal{A}(i, 0, 2)$. En dicho conjunto, es

$$f(z) = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i + (z-i)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - \frac{z-i}{-2i}} = \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z-i)^j}{(-2i)^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2i)^{j+1}} (z-i)^j$$

Observar que, en particular, los coeficientes que corresponden a potencias negativas de $z-i$ en ese desarrollo son todos 0.

- En las cercanías de $-i$, el módulo del numerador de f se aproxima a 2, y el módulo del denominador se puede hacer arbitrariamente pequeño. Entonces el límite de f cuando z tiende a $-i$ es ∞ .

Por otro lado, en $\mathcal{A}(-i, 0, 2)$, es $f(z) = (z+i)^{-1}$, de modo que, en ese conjunto, el desarrollo en serie de Laurent para f con centro en $-i$ es $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z+i)^{-j}$, con $c_{-1} = 1$ y $c_j = 0$ para todo $j \neq -1$. Notar que, en particular, hay una cantidad finita de coeficientes no nulos para potencias negativas de $z+i$ en ese desarrollo. \square

EJEMPLO 6.13. La función $f(z) = e^{1/z}$ tiene a 0 como única singularidad. Si nos aproximamos a 0 por el semieje real positivo, el módulo de la función crece sin cota, mientras que si lo hacemos por el semieje imaginario positivo, el módulo de la función vale constantemente 1. De allí que $f(z)$ no posee límite cuando z tiende a 0.

Por otro lado, en $\mathcal{A}(0, 0, \infty)$, f admite el siguiente desarrollo con centro en 0:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j = \sum_{j=-\infty}^0 \frac{1}{(-j)!} z^j$$

Observar en particular que, en ese desarrollo, hay una cantidad infinita de coeficientes no nulos correspondientes a potencias negativas de z . \square

Como vemos, el comportamiento de una función en las cercanías de una singularidad aislada puede ser de lo más variado: en algunos casos existe el límite, en otros no (ya sea por ser infinito o por oscilar). La clave para determinar ese comportamiento está en los desarrollos en serie de Laurent, según veremos a continuación.

Supongamos que $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad aislada en z_0 . Sea $r > 0$ tal que la única singularidad de f en $B_r(z_0)$ sea z_0 . Por el Teorema de Laurent, f posee desarrollo en serie alrededor de z_0 válido para $B_r^*(z_0) = \mathcal{A}(z_0, 0, r)$. Es decir que existe una sucesión $\{c_j\}$ tal que, para todo $z \in B_r^*(z_0)$,

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$$

Consideremos el conjunto $L = \{j < 0 : c_j \neq 0\}$. De los ejemplos de desarrollos en serie que consideramos anteriormente, podemos ver que hay varias alternativas para la cardinalidad de L . Eso nos da pie a la siguiente clasificación de singularidades aisladas:

- $L = \emptyset$, es decir, todos los coeficientes de las potencias negativas de $z - z_0$ son nulos. En este caso, z_0 se dice una **singularidad evitable** de f . Por ejemplo, i es una singularidad evitable para la función $(z-i)/(z^2+1)$ (ejemplo 6.12).
- L no es vacío pero tiene un cantidad finita de elementos. En este caso, se dice que z_0 es un **polo** de f . Si hacemos $m = -\min L$, se dice que el **orden del polo** z_0 es m . Los polos de orden 1 se llaman **polos simples**. Por ejemplo, $-i$ es un polo simple para la función $(z-i)/(z^2+1)$ (ejemplo 6.12).
- L tiene una cantidad infinita de elementos. En este caso, se dice que z_0 es una **singularidad esencial** de f . Por ejemplo, 0 es una singularidad esencial para la función $e^{1/z}$ (ejemplo 6.13).

Vamos a ver ahora cómo se comporta una función en las cercanías de una singularidad aislada, dependiendo del tipo de singularidad de que se trate.

Singularidades evitables. Si z_0 es singularidad evitable de f , de acuerdo a la definición que hemos dado, para todo $z \in B_r^*(z_0)$ se tiene que

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$$

Dicha expresión es, como vemos, una serie de potencias, que converge en todo punto de $B_r(z_0)$ (a $f(z)$ en $B_r^*(z_0)$, y a c_0 en z_0). Ya que $\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j = c_0$ (prop. 5.31), tenemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$. Queda demostrado entonces el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 6.14. *Si z_0 es una singularidad evitable de $f(z)$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe en \mathbb{C} .*

Como vemos, el término “evitable” proviene del hecho de que, con una adecuada redefinición de f en el centro del entorno, logramos una función que es analítica en todo el entorno (incluido el centro) y que coincide con f en el entorno reducido.

De la proposición 6.14, podemos extraer la siguiente consecuencia:

PROPOSICIÓN 6.15. *Si z_0 es singularidad evitable de $f(z)$, entonces $|f(z)|$ es una función acotada en algún entorno reducido alrededor de z_0 .*

DEMOSTRACIÓN. De la prop. 6.14, existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$. Entonces, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $z \in D \cap B_{\delta_1}^*(z_0)$, $|f(z) - L| < 1$. Tomando $\delta = \min\{r, \delta_1\} > 0$, se tiene que, para todo $z \in B_{\delta}^*(z_0)$, es $|f(z)| < 1 + |L|$. Luego, $|f(z)|$ es una función acotada en $B_{\delta}^*(z_0)$. \square

Más adelante veremos que la recíproca de esta afirmación es también cierta.

Polos. Cuando z_0 es un polo de orden m de f , el desarrollo en serie de Laurent con centro z_0 válido para $B_r^*(z_0)$ es de la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=-m}^{\infty} c_j (z - z_0)^j \\ &= c_{-m} (z - z_0)^{-m} + c_{-m+1} (z - z_0)^{-m+1} + \cdots + c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

con $c_{-m} \neq 0$. Para z en $B_r^*(z_0)$, hagamos

$$\lambda(z) = c_{-m} + c_{-m+1} (z - z_0) + \cdots + c_0 (z - z_0)^m + c_1 (z - z_0)^{m+1} + c_2 (z - z_0)^{m+2} + \cdots$$

Notemos que $\lambda(z) = (z - z_0)^m f(z)$ en $B_r^*(z_0)$.

Por ser una serie de potencias válida para $B_r^*(z_0)$, es $\lambda(z)$ analítica en z_0 , y $\lambda(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Hemos concluido una de las implicaciones del siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 6.16. *La función $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si, y sólo si, existe un entorno reducido de z_0 en el que f puede expresarse como $f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z - z_0)^m}$, donde λ es una función analítica en z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. La ida es nuestra deducción de más arriba. Para la vuelta, supongamos que $f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z - z_0)^m}$ en un entorno reducido $B_{\delta_1}^*(z_0)$, con m entero positivo, λ analítica en z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$. Por analiticidad de λ en z_0 , existe $\delta_2 > 0$ tal que $\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j (z - z_0)^j$ en $B_{\delta_2}(z_0)$. Hagamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, en $B_{\delta}^*(z_0)$, tenemos que

$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{j=0}^{\infty} d_j (z - z_0)^{j-m} = \sum_{j=-m}^{\infty} d_{j+m} (z - z_0)^j$$

lo cual muestra que, en $B_{\delta}^*(z_0)$, $f(z)$ admite un desarrollo en serie de Laurent cuyo coeficiente de $(z - z_0)^{-m}$ es $d_0 = \lambda(z_0) \neq 0$, y cuyo coeficiente de $(z - z_0)^j$ vale 0 para todo $j < -m$. En consecuencia, z_0 es un polo de orden m para f . \square

En base a lo anterior, podemos sacar la siguiente conclusión:

PROPOSICIÓN 6.17. *Si z_0 es polo para f , entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\delta > 0$ y $m \geq 1$ tales que, en $B_\delta^*(z_0)$, es $f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}$, con λ analítica en z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$ (prop. 6.16). Siendo λ continua en z_0 , tenemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda(z) \neq 0$. Por otro lado, $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m = 0$, de modo que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. \square

Veremos enseguida que también la afirmación recíproca de la anterior es cierta.

Existe una estrecha relación entre los conceptos de polos y de ceros de funciones analíticas. Recordemos que si f es analítica en z_0 y z_0 es un cero aislado de f , entonces existe un entorno de z_0 para el cual vale que $f(z) = (z - z_0)^m \phi(z)$ para cierto natural $m > 0$ (denominado el orden del cero z_0) y ϕ analítica en z_0 con $\phi(z_0) \neq 0$.

PROPOSICIÓN 6.18. *El complejo z_0 es un polo de orden m para f si, y sólo si, z_0 es un cero de orden m para la función $1/f$ (completada con el valor 0 en z_0).*

DEMOSTRACIÓN. De la proposición 6.16, tenemos que z_0 es polo de orden m para f si, y sólo si,

$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z - z_0)^m}$$

para algún entorno reducido de z_0 , con λ analítica en z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$ (y, por continuidad de λ en z_0 , puede suponerse que λ no tiene ceros en ese entorno). Pero esto equivale a que, en ese entorno,

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \frac{1}{\lambda(z)}$$

con $1/\lambda(z)$ analítica en z_0 (pues λ es analítica en z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$), lo que, por definición, equivale a que $1/f$ tiene un cero de orden m en z_0 . \square

La proposición anterior establece un criterio que es muy útil a veces para ahorrar trabajo a la hora de detectar el orden de un polo, pues conocemos varios criterios para averiguar el orden de un cero, por ejemplo el criterio de la derivada.

EJEMPLO 6.19. Para la función $f(z) = \frac{z}{\sin \frac{\pi}{z}}$, resulta que $g(z) = 1/f(z) = \frac{\sin(\pi/z)}{z}$, cuyos ceros son los reales de la forma $1/k$ ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$).

$$g'(z) = -\pi z \cos \frac{\pi}{z} - z^2 \sin \frac{\pi}{z}$$

y, para $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, es $g'(\frac{1}{k}) = -\frac{\pi}{k} \cos(k\pi) - \frac{1}{k^2} \sin(k\pi) \neq 0$, así que cada cero es de orden uno. Luego, los números de la forma $1/k$ con k entero no nulo son polos simples para $f(z)$. \square

Singularidades esenciales. La característica fundamental en relación a este tipo de singularidades es que no existe límite de la función cuando z tiende a una cualquiera de ellas, según se desprende fácilmente del siguiente teorema, que enuncia que, en cualquier entorno de una singularidad esencial, una función toma valores tan cercanos como se desee a cualquier número complejo.

TEOREMA 6.20. (**Cassoratti-Weierstrass**) *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que z_0 es singularidad esencial para $f(z)$. Entonces, para todo $\delta > 0$, la clausura de $f(D \cap B_\delta^*(z_0))$ es \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $r > 0$ tal que z_0 es la única singularidad de f en $B_r(z_0)$. Alcanza con mostrar el resultado para cualquier $\delta < r$, pues cualquier entorno reducido de radio mayor contiene uno de tales entornos. Sea entonces $\delta > 0$ tal que $\delta < r$. Debemos mostrar que para todos $w \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$, existe $z_1 \in B_\delta^*(z_0)$ tal que $|f(z_1) - w| < \varepsilon$. Tomemos entonces $w \in \mathbb{C}$ y

$\varepsilon > 0$ arbitrarios. Si existe $z_1 \in B_\delta^*(z_0)$ tal que $|f(z_1) - w| = 0$, el resultado ya está establecido. Si no existe tal z_1 , hagamos $B = B_\delta^*(z_0)$ y consideremos la función $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

Observar que $f(z) = w + 1/g(z)$ y que $g(z)$ no se anula en B . Además, como f es analítica en B , y $f(z) \neq w$ en B , tenemos que z_0 es singularidad aislada para g . Por lo tanto, g admite desarrollo en serie de Laurent con centro z_0 válido para B , digamos $g(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$.

Veamos primero que z_0 no puede ser singularidad evitable de g : si lo fuera, sería $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$, con algún $c_j \neq 0$ (de lo contrario, habría contradicción con el hecho de que g no es nula en B); definamos entonces, en $B_\delta(z_0)$, $h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ (h es igual que g , salvo que definida en el centro del entorno); h es analítica en z_0 y, para todo $z \in B$, $f(z) = w + 1/h(z)$.

- De ser $c_0 \neq 0$, sería $h(z_0) = c_0 \neq 0$, por lo que $w + 1/h(z)$ sería analítica en z_0 , y entonces z_0 sería singularidad evitable para f , contradiciendo la hipótesis de que es esencial.
- De ser $c_0 = 0$, entonces z_0 sería un cero de h , y, por lo tanto, un polo de $1/h$, es decir, un polo de $f(z) - w$, lo cual implicaría que es un polo de f , contradiciendo también la hipótesis de que f tiene en z_0 una singularidad esencial.

Vemos que suponer que z_0 es singularidad evitable de g nos lleva en cualquier caso a una contradicción. Por lo tanto, existe $m > 0$ tal que $c_{-m} \neq 0$. Pero, por el Teorema de Laurent,

$$c_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{-m+1}} dz$$

donde \mathcal{C}_R es cualquier circunferencia con centro z_0 y radio R satisfaciendo $0 < R < \delta$. Por lo tanto, para todo R que satisfaga esas condiciones, es

$$0 \neq |c_{-m}| \leq \frac{1}{2\pi} \max \{|g(z)(z - z_0)^{m-1}| : z \in \mathcal{C}_R\} 2\pi R = \max \{|g(z)| : z \in \mathcal{C}_R\} R^m$$

De allí que

$$\max \{|g(z)| : z \in \mathcal{C}_R\} \geq \frac{|c_{-m}|}{R^m}$$

Como el lado derecho se hace arbitrariamente grande en la medida que R tiende a 0, podemos elegir $R > 0$ tal que

$$\max \{|g(z)| : z \in \mathcal{C}_R\} > \frac{1}{\varepsilon}$$

lo cual implica que existe $z_1 \in \mathcal{C}_R$ tal que $|g(z_1)| > 1/\varepsilon$, de donde $1/|g(z_1)| < \varepsilon$, así que $|f(z_1) - w| < \varepsilon$, quedando establecido el teorema. \square

El Teorema de Cassoratti-Weierstrass afirma que, en cualquier entorno de una singularidad esencial, la función toma valores arbitrariamente cercanos a cualquier número complejo. Existe una versión más general de ese teorema, que afirma que, en cualquier entorno de una singularidad esencial, la función *toma* todos los valores complejos, salvo una posible única excepción, una cantidad infinita de veces. Es el *Teorema de Picard*, que enunciamos sin demostración, por requerir de herramientas más avanzadas.

TEOREMA 6.21. (Picard) Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, y sea z_0 una singularidad esencial para f . Entonces existe $E \subset \mathbb{C}$ tal que E tiene a lo sumo un solo elemento y, para todo $\delta > 0$ y todo $w \in \mathbb{C} - E$, $\{z \in B_\delta^*(z_0) \cap D : f(z) = w\}$ es un conjunto infinito.

Ilustremos el Teorema de Picard a través del siguiente ejemplo:

EJEMPLO 6.22. Consideremos la función $f(z) = e^{1/z}$, analizada en el ejemplo 6.13. Vimos allí que 0 es la única singularidad de f , y que es de carácter esencial. La función jamás toma

el valor 0 (es decir, $E = \{0\}$). Sin embargo, para cualquier $w = \rho e^{i\theta} \neq 0$, los complejos de la forma

$$z_k = \frac{\ln \rho}{(\ln \rho)^2 + (\theta + 2k\pi)^2} - i \frac{\theta + 2k\pi}{(\ln \rho)^2 + (\theta + 2k\pi)^2}$$

satisfacen $e^{1/z_k} = w$, cualquiera sea $k \in \mathbb{Z}$. Para k suficientemente grande, $|z_k|$ se hace arbitrariamente pequeño, por lo que, en cualquier entorno de 0, hay infinitos de tales z_k , es decir, infinitos puntos en los que $f(z)$ toma el valor w . \square

El teorema 6.20 permite resumir los modos de comportamiento de una función en las cercanías de una singularidad aislada, de acuerdo al siguiente resultado.

TEOREMA 6.23. *Sea z_0 una singularidad aislada para $f(z)$.*

1. z_0 es evitable si, y sólo si, $|f(z)|$ es acotada en algún entorno reducido alrededor de z_0 .
2. z_0 es polo si, y sólo si, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.
3. z_0 es esencial si, y sólo si, $\forall L \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq L$ (es decir, la función no tiene límite en \mathbb{C}_∞).

DEMOSTRACIÓN. Las implicaciones de ida de los dos primeros incisos ya fueron demostradas en las proposiciones 6.15 y 6.17, y la del tercero se concluye directamente del teorema 6.20.

Si existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para todo z en algún entorno reducido B alrededor de z_0 , no puede ser $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ (de donde z_0 no puede ser un polo, según la proposición 6.17), y para todo z en ese entorno reducido es $|f(z)| < M < M+1$, con lo cual $M+1$ no está en la clausura de $f(B)$, es decir, $\overline{f(B)} \neq \mathbb{C}$ (de donde, por teorema 6.20, z_0 no es singularidad esencial). Entonces, z_0 es singularidad evitable.

Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, sea $\delta > 0$ tal que para todo $z \in B_\delta^*(z_0)$, $|f(z)| > 1$. Entonces, 0 no pertenece a la clausura de $f(B_\delta^*(z_0))$, y entonces z_0 no puede ser una singularidad esencial, y tampoco una evitable pues $|f(z)|$ no está acotada en ningún entorno reducido, por la definición de límite infinito. Así que z_0 es un polo.

Finalmente, si $f(z)$ no tiene límite en \mathbb{C}_∞ cuando z tiende a z_0 , no puede ser z_0 un polo (prop. 6.17) ni una singularidad evitable (prop. 6.14), y entonces debe ser singularidad esencial. \square

3. Residuos. El Teorema de los Residuos

Supongamos que $f(z)$ tiene en z_0 una singularidad aislada. Sea $r > 0$ tal que f no tiene otra singularidad en $B_r(z_0)$, y sea $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ con centro z_0 válido para $B_r^*(z_0)$. Del Teorema de Laurent, caso $j = -1$, resulta que

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$$

donde \mathcal{C} es cualquier circunferencia con centro z_0 y radio menor que r , recorrida una vez en sentido positivo. Esto sugiere que la integral de $f(z)$ sobre \mathcal{C} podría obtenerse de manera directa si se contara con el coeficiente c_{-1} de desarrollo de f en $B_r^*(z_0)$.

EJEMPLO 6.24. Obtengamos $\int_{\mathcal{C}} e^{1/z} dz$ cuando \mathcal{C} es el rombo con vértices $1, i, -1, -i$ recorrido en sentido positivo.

Según vimos en el ejemplo 6.13, el integrando tiene a 0 como única singularidad, y es de tipo esencial. $e^{1/z}$ es analítica en cualquier entorno reducido alrededor de 0, y su desarrollo alrededor de 0 tiene coeficiente $c_j = \frac{1}{(-j)!}$ para $j \leq 0$, y $c_j = 0$ para $j > 0$. En particular, $c_{-1} = 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} e^{1/z} dz$ donde \mathcal{C}_1 es, por ejemplo, la circunferencia con centro 0 y radio $1/100$ recorrida una vez en sentido antihorario. Pero, por el principio de deformación de contornos, es $\int_{\mathcal{C}_1} e^{1/z} dz = \int_{\mathcal{C}} e^{1/z} dz$, de modo que concluimos directamente que $\int_{\mathcal{C}} e^{1/z} dz = 2\pi i$. \square

Notar que ni el teorema ni las fórmulas de Cauchy son de aplicación en el ejemplo anterior, y la parametrización resultaría sumamente engorrosa. Resulta entonces interesante considerar con detenimiento esta alternativa de cálculo de integrales por medio de c_{-1} .

DEFINICIÓN 6.25. Sea z_0 una singularidad aislada para $f(z)$. El **residuo de f en z_0** se define mediante

$$\text{Res}(f, z_0) = c_{-1}$$

en donde c_{-1} es el coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ con centro en z_0 válido para algún entorno reducido alrededor de z_0 .

Formalicemos nuestros comentarios anteriores respecto del cálculo de integrales cuando el integrando es una función analítica sobre y en el interior del contorno de integración, excepto en una única singularidad en el interior de la curva.

PROPOSICIÓN 6.26. Sean \mathcal{C} un contorno cerrado simple, z_0 un punto interior de \mathcal{C} y f una función analítica en $\mathcal{C} \cup \text{int}(\mathcal{C})$ excepto en z_0 . Entonces,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0)$$

cuando \mathcal{C} se recorre en sentido positivo.

DEMOSTRACIÓN. Elijamos $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subset \text{int}(\mathcal{C})$. Entonces, la única singularidad de f en $B_r(z_0)$ es z_0 . Sea $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ con centro en z_0 válido para $B_r^*(z_0)$, y sea \mathcal{C}_1 cualquier circunferencia con centro z_0 y radio menor que r . Por el principio de deformación de contornos, es $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz$, y, por el Teorema de Laurent, es $2\pi i c_{-1} = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz$. Combinando estas dos expresiones, y teniendo en cuenta la definición de residuo de f en z_0 , se sigue el resultado. \square

Entonces, queda claro que si disponemos de algún método para calcular fácilmente residuos, contaremos con una buena alternativa de cálculo de ciertos tipos de integrales sobre contornos cerrados.

En cualquier caso, realizar el desarrollo en serie de Laurent para f con centro en z_0 válido para un entorno reducido de z_0 es una alternativa para obtener el residuo de f en z_0 sin resolver la integral dada en el Teorema de Laurent (basta con observar, en tal desarrollo, el coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$). De hecho, éste es el único método del que se dispone para el caso en que z_0 es singularidad esencial. Por otro lado, el cálculo del residuo en las singularidades evitables es automático: vale 0 por la definición de ese tipo de singularidades. Veamos entonces cómo podemos calcular residuos en polos, dado que existen alternativas para obtenerlos sin siquiera hacer desarrollos en serie.

Supongamos que $f(z)$ tiene en z_0 un polo simple. Luego,

$$f(z) = c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

en algún $B_r^*(z_0)$. Entonces, en ese entorno reducido tenemos que

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + c_2(z - z_0)^3 + \cdots$$

Tomando en ambos miembros límite cuando z tiende a z_0 , resulta

$$c_{-1} = \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

EJEMPLO 6.27. Calculemos el residuo de

$$f(z) = \frac{z}{(z - i)(z^2 + 4)}$$

en cada una de sus singularidades aisladas. Notemos que $f(z) = z(z - i)^{-1}(z - 2i)^{-1}(z + 2i)^{-1}$. Sus singularidades son i , $2i$ y $-2i$, siendo todas polos simples. Entonces,

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{z^2 + 4} = \frac{i}{i^2 + 4} = \frac{1}{3}i$$

Análogamente,

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{(z - i)(z + 2i)} = \frac{2i}{i(4i)} = -\frac{1}{2}i$$

y

$$\operatorname{Res}(f, -2i) = \lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i)f(z) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z}{(z - i)(z - 2i)} = \frac{-2i}{(-3i)(-4i)} = \frac{1}{6}i$$

Es de observar que si hubiésemos decidido calcular residuos haciendo los desarrollos en serie, del ejemplo 6.8 sólo podríamos concluir que el residuo de f en i es $i/3$, pero para los residuos en $2i$ y $-2i$ no nos hubiera servido ninguno de los desarrollos obtenidos en aquel ejemplo, ya que los mismos son con centro en i , pero aquí necesitamos desarrollos con centro en $2i$ y $-2i$, respectivamente. \square

Veamos un caso particular de polo simple que aparece a menudo en los cálculos.

PROPOSICIÓN 6.28. *Supongamos que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, con g y h analíticas en z_0 , z_0 cero simple de h , y $g(z_0) \neq 0$. Entonces,*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

DEMOSTRACIÓN. Por ser z_0 cero simple de h , en algún entorno de z_0 debe ser $h(z) = (z - z_0)\lambda(z)$, con λ analítica en z_0 y $\lambda(z_0) \neq 0$. Entonces, $h'(z) = \lambda(z) + (z - z_0)\lambda'(z)$, por lo que $h'(z_0) = \lambda(z_0)$. Luego,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{(z - z_0)\lambda(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{\lambda(z)} = \frac{g(z_0)}{\lambda(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

 \square

EJEMPLO 6.29. La función $z^5 + 32$ tiene un cero en -2 , y el mismo es simple, como puede fácilmente verse por el criterio de la derivada. La función e^z es analítica en todo el plano complejo, en particular en -2 , y $e^{-2} \neq 0$. Entonces, por la proposición 6.28,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^5 + 32}, -2\right) = \left.\frac{e^z}{5z^4}\right|_{-2} = \frac{1}{80e^2}$$

 \square

Veamos ahora cómo calcular el residuo en polos de orden más grande. Comencemos viendo el caso en que f tiene en z_0 un polo de orden 2. En esa situación,

$$f(z) = \sum_{j=-2}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$$

en algún $B_r^*(z_0)$, con $c_{-2} \neq 0$. Entonces, en ese entorno reducido tenemos que

$$(z - z_0)^2 f(z) = \sum_{j=-2}^{\infty} c_j(z - z_0)^{j+2}$$

Derivando miembro a miembro, resulta

$$\frac{d((z - z_0)^2 f(z))}{dz} = \sum_{j=-2}^{\infty} (j+2)c_j(z - z_0)^{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)c_{j-1}(z - z_0)^j$$

Tomando en ambos miembros límite cuando z tiende a z_0 , resulta

$$c_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} ((z - z_0)^2 f(z))$$

En general, siguiendo este procedimiento, para un polo de orden m tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 6.30. *Si z_0 es polo de orden m para $f(z)$, entonces*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}((z - z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}$$

DEMOSTRACIÓN. Por ser z_0 polo de orden m para f , es

$$f(z) = \sum_{j=-m}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$$

en algún $B_r^*(z_0)$, con $c_{-m} \neq 0$. Entonces, en ese entorno reducido tenemos que

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{j=-m}^{\infty} c_j (z - z_0)^{j+m}$$

Derivando miembro a miembro $m - 1$ veces, es

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}((z - z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}} &= \sum_{j=-m}^{\infty} (j+m)(j+m-1) \cdots (j+2) c_j (z - z_0)^{j+1} \\ &= \sum_{j=-1}^{\infty} (j+m)(j+m-1) \cdots (j+2) c_j (z - z_0)^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+m-1)(j+m-2) \cdots (j+1) c_{j-1} (z - z_0)^j \end{aligned}$$

Tomando en ambos miembros límite cuando z tiende a z_0 y despejando c_{-1} , resulta

$$c_{-1} = \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}((z - z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}$$

□

3.1. El Teorema de los Residuos. La proposición 6.26 nos proporciona una herramienta para calcular integrales sobre contornos cerrados simples cuando la función del integrando posee una única singularidad en su interior. Sin embargo, podemos extender fácilmente la metodología para el caso en que la función presenta, en el interior del contorno, una cantidad finita de singularidades (que serán, obviamente, aisladas), a través del siguiente resultado.

TEOREMA 6.31. (Teorema de los Residuos) *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, y sea \mathcal{C} un contorno cerrado simple en D . Supongamos además que f es analítica sobre \mathcal{C} , y que, en el interior de \mathcal{C} , f posee sólo una cantidad finita de singularidades z_1, \dots, z_n . Entonces,*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

cuando \mathcal{C} se recorre en sentido positivo.

DEMOSTRACIÓN. Haremos inducción en n , la cantidad de singularidades que f posee en el interior de \mathcal{C} .

El caso en que hay una sola singularidad corresponde al enunciado de la proposición 6.26.

Supongamos ahora el enunciado válido para cualquier contorno que contenga $n - 1$ singularidades del integrando en su interior, y hagamos de cuenta que f es analítica sobre \mathcal{C} y posee exactamente n singularidades en su interior. Elijamos puntos A, B distintos sobre \mathcal{C} de modo que pueda trazarse un contorno simple \mathcal{C}_1 desde A hasta B , por el interior de \mathcal{C} , sin pasar por las singularidades de f , y que divida al interior de \mathcal{C} en dos partes, una de las cuales contenga a una sola de las singularidades, y la otra al resto. Llamemos Γ_1 a la concatenación de \mathcal{C}_1 con la porción de \mathcal{C} que va desde B hasta A en sentido positivo, y Γ_2 a la concatenación de la porción de \mathcal{C} que va desde A hasta B en sentido positivo con $-\mathcal{C}_1$ (ver fig. 2).

Γ_1 y Γ_2 son contornos cerrados simples sobre los cuales f es analítica, y uno de ellos (digamos Γ_1) posee en su interior exactamente $n - 1$ singularidades de f (digamos z_1, \dots, z_{n-1}),

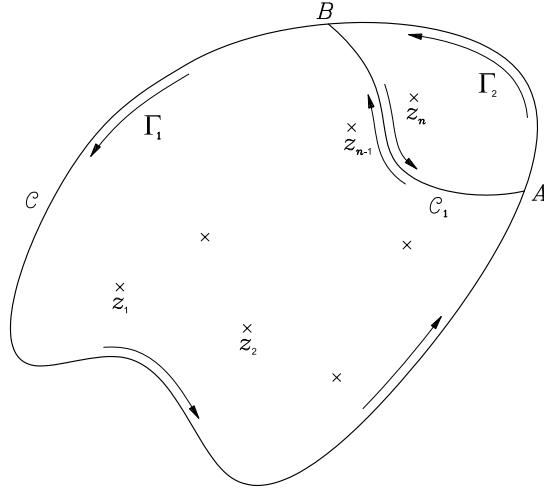


FIGURA 2.

mientras que el otro tiene en su interior exactamente una singularidad de f , digamos z_n . Entonces, por hipótesis inductiva y por proposición 6.26, las integrales de f sobre Γ_1 y Γ_2 valen, respectivamente:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} f(z)dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \text{Res}(f, z_k) \\ \int_{\Gamma_2} f(z)dz &= 2\pi i \text{Res}(f, z_n)\end{aligned}$$

Notemos que la suma de ambas integrales a izquierda es igual a la integral de f sobre \mathcal{C} en sentido positivo, pues las integrales sobre \mathcal{C}_1 y sobre $-\mathcal{C}_1$ se compensan. Por lo tanto, sumando miembro las igualdades anteriores, resulta

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \text{Res}(f, z_k) + 2\pi i \text{Res}(f, z_n) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

quedando establecido el resultado. \square

EJEMPLO 6.32. Sea

$$f(z) = \frac{z}{(z-i)(z^2+4)}$$

En el ejemplo 6.27, hemos visto que las singularidades de f son i , $2i$ y $-2i$, y los respectivos residuos de f en ellas son $i/3$, $-i/2$, $i/6$.

1. Calculemos $\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz$ si \mathcal{C}_1 es el círculo con centro $2i$ y radio 2, recorrido una vez en sentido positivo. Para ello, notemos que f es analítica sobre \mathcal{C}_1 , y posee las singularidades i y $2i$ en su interior. Por el Teorema de los Residuos es, entonces,

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i)) = 2\pi i \left(\frac{i}{3} - \frac{i}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

2. Ahora obtengamos $\int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$ si \mathcal{C}_2 es el círculo con centro 0 y radio 3, recorrido una vez en sentido positivo. En este caso, f es analítica sobre \mathcal{C}_2 , y posee las singularidades i , $2i$ y $-2i$ en su interior. Luego,

$$\int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i) + \text{Res}(f, -2i)) = 2\pi i \left(\frac{i}{3} - \frac{i}{2} + \frac{i}{6} \right) = 0$$

\square

4. Aplicaciones del Teorema de los Residuos al cálculo de integrales reales

Veremos ahora una difundida aplicación del Teorema de los Residuos para calcular algunos tipos de integrales de funciones reales de variable real. Se trata de integrales que, en muchos casos, son dificultosas, cuando no imposibles, con los métodos tradicionales del Cálculo.

4.1. Integrales de tipo $\int_0^{2\pi} F(\cos x, \sin x) dx$.

Supongamos dada una expresión F que es función de $\cos x$ y de $\sin x$, y queremos hallar el valor de su integral en el intervalo $[0, 2\pi]$. La estrategia que presentaremos consiste en ver a dicha integral como lo que resulta de aplicar la definición de integral compleja de alguna función de variable compleja apropiada sobre algún contorno conveniente, y resolver esa integral compleja fácilmente por el Teorema de los Residuos, en caso de satisfacerse las hipótesis correspondientes.

Sea \mathcal{C} la circunferencia de radio 1 con centro en el origen, recorrida una vez en sentido positivo. Una parametrización para \mathcal{C} es $z(t) = e^{it}$, con el parámetro t variando entre 0 y 2π . Tenemos que

$$z'(t) = iz(t) \quad \cos t = \frac{1}{2} \left(z(t) + \frac{1}{z(t)} \right) \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z(t) - \frac{1}{z(t)} \right)$$

Consideremos la función de variable compleja $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{iz} F \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)$$

Es decir, f es lo que surge de reemplazar, en la expresión de F , a $\cos x$ por $(z + z^{-1})/2$, a $\sin x$ por $(z - z^{-1})/(2i)$ y dividir todo por iz .

Si aplicamos la definición de integral de f sobre \mathcal{C} , queda

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z(t)) z'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{iz(t)} F(\cos t, \sin t) iz(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$$

En el caso en que f no tenga singularidades sobre \mathcal{C} , y tenga una cantidad finita de singularidades en su interior, podemos aplicar el Teorema de los Residuos para calcular la integral de f sobre \mathcal{C} :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{|z_k| < 1} \text{Res}(f, z_k)$$

donde el subíndice de la suma indica que la misma debe hacerse sobre todas las singularidades z_k de f que cumplan $|z_k| < 1$, que son las singularidades de f en el interior de \mathcal{C} . Juntando todo lo anterior, concluimos que

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{|z_k| < 1} \text{Res}(f, z_k)$$

EJEMPLO 6.33. Calculemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin x} dx$$

De acuerdo al integrando, la función $f(z)$ a considerar es

$$f(z) = \frac{1}{2 + \frac{z^2-1}{2iz}} \frac{1}{iz} = \frac{2iz}{z^2 + 4iz - 1} \frac{1}{iz}$$

Notar que 0 es singularidad de f , pero es en este caso evitable, y entonces $\text{Res}(f, 0) = 0$. Además, f tiene otras dos singularidades: $(-2 + \sqrt{3})i$ y $(-2 - \sqrt{3})i$, de las cuales sólo la primera está en el interior de la circunferencia con centro 0 y radio 1, así que necesitamos calcular el residuo de f en $(-2 + \sqrt{3})i$. Observar que, en las cercanías de ese punto, $f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$. Por lo tanto, aplicando el método dado en la proposición 6.28, resulta

$$\text{Res} \left(f, (-2 + \sqrt{3})i \right) = \frac{2}{2(-2 + \sqrt{3})i + 4i} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin x} dx = 2\pi i \left(\text{Res}(f, 0) + \text{Res}\left(f, \left(-2 + \sqrt{3}\right)i\right) \right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}i \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

□

4.2. Integrales de tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Si $f(x)$ es una función real (de la variable real x) continua en todo $x \in \mathbb{R}$, se define la **integral impropia de $f(x)$ entre $-\infty$ e ∞** como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 f(x)dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x)dx$$

suponiendo que ambos límites a la derecha existen. Por otro lado, se define el **valor principal de Cauchy** de esa integral como

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx$$

cuando ese límite existe. Es posible mostrar que si la integral impropia existe, coincide con su VPC. Presentaremos ahora un método de cálculo de VPC a través del Teorema de los Residuos. La estrategia será considerar al integrando f como una función de variable compleja e integrarla sobre un contorno cerrado simple apropiado (utilizando para ello el Teorema de los Residuos) de manera tal que el valor de esa integral coincida con el VPC de la integral de $f(x)$.

Para lo que sigue, dado $R \in \mathbb{R}$, designaremos por L_R al segmento del plano que va desde el complejo $-R$ hasta el complejo R , y por S_R a la semicircunferencia con centro 0 y radio R desde R hasta $-R$, en sentido positivo. Es decir,

$$L_R = \{x : -R \leq x \leq R\} \quad S_R = \{Re^{it} : 0 \leq t \leq \pi\}$$

Supongamos que $f(z)$ es una función definida en algún dominio en \mathbb{C} que contiene a \mathbb{R} , y tal que, para todo $z \in \mathbb{R}$, $f(z)$ es un número real (de modo que $f|_{\mathbb{R}}$ es una función real de variable real). Obsérvese que, para cualquier $R \in \mathbb{R}$, $\int_{L_R} f(z)dz = \int_{-R}^R f(x)dx$, por lo que $VPC \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} f(z)dz$. Por otro lado, la concatenación de L_R con S_R es un contorno cerrado simple. Si $f(z)$ fuese analítica sobre el eje real y tuviera una cantidad finita de singularidades en el semiplano por encima del eje real, resultaría que, para todo R suficientemente grande, la concatenación de L_R y S_R contendría en su interior a todas ellas (ver fig. 3).

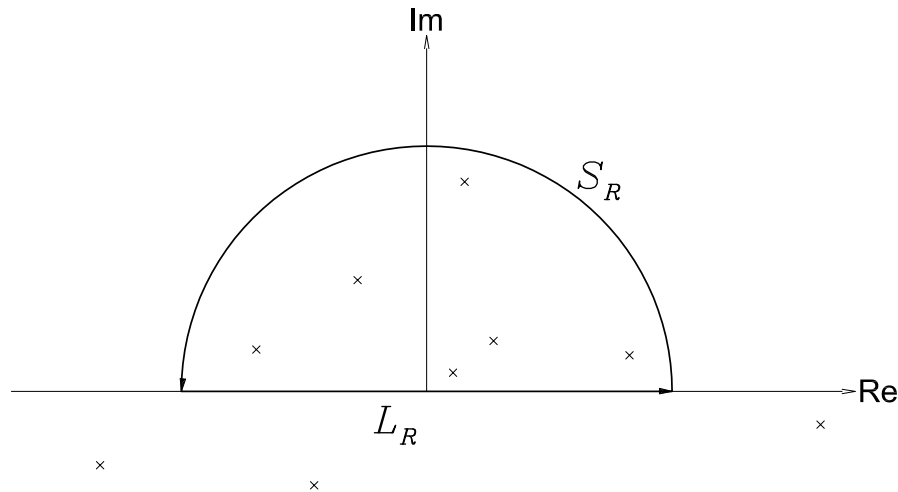


FIGURA 3.

Por lo tanto,

$$\int_{L_R} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{Res}(f, z_k)$$

donde el subíndice de la suma indica que la misma debe realizarse sobre todas las singularidades que f tenga en el semiplano superior (que son las que tienen parte imaginaria estrictamente positiva). El lado derecho de la igualdad anterior es una constante compleja. Entonces, tomando límite cuando R tiende a infinito (suponiendo que existan los límites individuales),

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{Res}(f, z_k)$$

Resulta que, imponiendo la condición adicional de que $zf(z)$ tenga límite 0 cuando z tiende a infinito por el semiplano superior, se tiene que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0$, según muestra el siguiente resultado.

LEMA 6.34. Sean r, t_1, t_2 números reales tales que $r > 0$ y $-\pi \leq t_1 < t_2 \leq \pi$. Hagamos $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r \wedge t_1 \leq \text{Arg } z \leq t_2\}$. Sea f una función analítica en D , satisfaciendo que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in D$ con $|z| > \delta$, se cumple que $|zf(z)| < \varepsilon$. Entonces,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz = 0$$

donde $\mathcal{C}_R = \{Re^{it} : t_1 \leq t \leq t_2\}$.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier $R > r$, la longitud de \mathcal{C}_R es $(t_2 - t_1)R$, y entonces, por la desigualdad M-L,

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz \right| \leq \max \{|f(z)| : z \in \mathcal{C}_R\} R(t_2 - t_1) = \max \{|zf(z)| : z \in \mathcal{C}_R\} (t_2 - t_1)$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que si $|z| < \delta$, entonces $|zf(z)| < \varepsilon/(t_2 - t_1)$. Luego, para cualquier real R mayor que δ y que r , es

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{t_2 - t_1} (t_2 - t_1) = \varepsilon$$

de donde se concluye el resultado. \square

Juntando todas nuestras consideraciones anteriores, obtenemos la siguiente fórmula de cálculo de VPC.

TEOREMA 6.35. Sea $f(x)$ una función real de variable real que admita extensión a una función compleja $f(z)$ tal que satisfaga:

1. $f(z)$ es analítica sobre el eje real, y tiene una cantidad finita de singularidades en el semiplano por encima del eje real.
2. $|zf(z)|$ tiende a 0 cuando z tiende a infinito por el semiplano superior.

Entonces,

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{Res}(f, z_k)$$

La condición de tender $|zf(z)|$ a 0 por el semiplano superior es satisfecha por una amplia colección de funciones, en particular por las funciones racionales en las que el grado del polinomio del denominador es al menos dos unidades mayor que el grado del polinomio del numerador.

EJEMPLO 6.36. Calculemos

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

Para ello, consideremos $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$, que es analítica en todo el plano excepto en $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{-i\pi/4}$ y $e^{-3i\pi/4}$, que son polos simples. Sólo las dos primeras de las singularidades mencionadas están en el semiplano superior. Además, para $z \neq 0$, es

$$zf(z) = \frac{z^3}{z^4+1} = \frac{1}{z + \frac{1}{z}}$$

que tiende a 0 cuando z tiende a infinito, y entonces $|zf(z)|$ tiende a 0 cuando z tiende a infinito.

Por otro lado, aplicando la proposición 6.28, es

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, e^{i\pi/4}) &= \frac{1}{4e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) \\ \operatorname{Res}(f, e^{3i\pi/4}) &= \frac{1}{4e^{3i\pi/4}} = \frac{1}{4}(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)) = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i)\end{aligned}$$

Luego, según el teorema 6.35,

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i) \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

□

4.3. Integrales de tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(mx) dx$ o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(mx) dx$.

Estos tipos de integrales, en principio, pueden resolverse por el método visto en la sección precedente, bajo la condición de que el integrando, extendido al campo complejo, satisfaga que $|zf(z) \cos(mz)| \rightarrow 0$ (o $|zf(z) \sin(mz)| \rightarrow 0$) cuando $z \rightarrow \infty$ por el semiplano superior. Sin embargo, $|\cos(mz)|$ y $|\sin(mz)|$ presentan direcciones de crecimiento exponencial (por ejemplo, cuando $z \rightarrow \infty$ por el semieje imaginario positivo), por lo que la condición $|zf(z) \cos(mz)| \rightarrow 0$ sólo se satisface para muy particulares f . Es preciso, entonces, buscar condiciones más débiles para f que las establecidas en el lema 6.34.

Las integrales $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(mx) dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(mx) dx$ son las partes real e imaginaria, respectivamente, de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx} dx$, por lo que alcanzará con estudiar esta última. Además, es suficiente analizar el caso $m > 0$, pues el otro caso puede resolverse a través del cambio de variable $x = -t$.

Para poder arribar a conclusiones, necesitaremos del hecho que, para todo real x entre 0 y $\pi/2$, es

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$$

como lo muestra la superposición de las gráficas de las funciones $2x/\pi$, $\sin x$ y x en ese intervalo (ver fig. 4).

En efecto, si hacemos $h(x) = x - \sin x$, esa función es continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$, y $h'(x) = 1 - \cos x$, que se anula sólo en $\pi/2$, de donde la función no tiene extremos en el interior del intervalo, y, por lo tanto, conserva el signo, es decir que $\sin x \leq x$ en todo el intervalo. Por un razonamiento parecido, se tiene también la otra desigualdad.

Otra propiedad que necesitaremos es que, para todo $k \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\pi} e^{k \sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{k \sin x} dx$$

Para verlo, basta con particionar el intervalo de integración en $\pi/2$, teniéndose que

$$\int_0^{\pi} e^{k \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{k \sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{k \sin x} dx$$

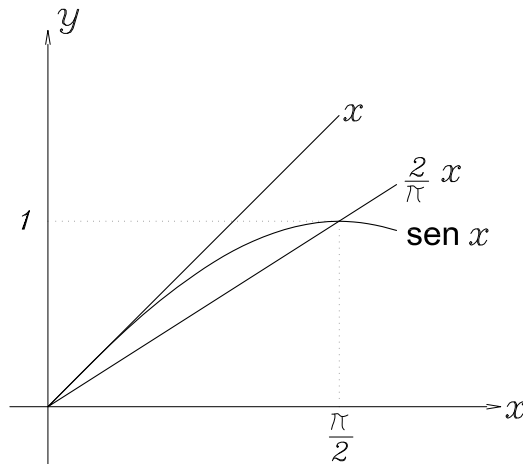


FIGURA 4.

y, haciendo el cambio de variable $t = \pi - x$, se puede ver que la última integral resulta igual a $\int_0^{\pi/2} e^{k \sin x} dx$.

TEOREMA 6.37. Sea $m > 0$, y sea $f(x)$ una función real de variable real que admita extensión a una función compleja $f(z)$ tal que satisfaga:

1. $f(z)$ es analítica sobre el eje real, y tiene una cantidad finita de singularidades en el semiplano por encima del eje real.
2. $|f(z)|$ tiende a 0 cuando z tiende a infinito por el semiplano superior.

Entonces,

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{Res}(f(z) e^{imz}, z_k)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $r > 0$ tal que para toda singularidad z_k de $f(z)$ en el semiplano superior, $|z_k| < r$. Sea R cualquier real mayor que r . Entonces $f(z) e^{imz}$ es analítica sobre L_R y sobre S_R , y en el interior del contorno cerrado determinado por la concatenación de ambas, excepto en una cantidad finita de singularidades. Por lo tanto,

$$\int_{L_R} f(z) e^{imz} dz + \int_{S_R} f(z) e^{imz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{Res}(f(z) e^{imz}, z_k)$$

de donde

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) e^{imz} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k > 0} \text{Res}(f(z) e^{imz}, z_k)$$

así que el resultado estará establecido al demostrar que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) e^{imz} dz = 0$.

Si hacemos $M(R) = \max\{|f(z)| : z \in S_R\}$, por hipótesis para f sabemos que $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$. Para $z = R e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq \pi$, tenemos que $imz = imR \cos \theta - mR \sin \theta$, de donde $e^{imz} = e^{-mR \sin \theta + imR \cos \theta}$, así que

$$|e^{imz}| = e^{-mR \sin \theta} \leq e^{-2mR\theta/\pi}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{S_R} f(z) e^{imz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{-mR \sin \theta + imR \cos \theta} R i e^{i\theta} d\theta \right| \\
 &\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{-mR \sin \theta} R d\theta \\
 &\leq RM(R) \int_0^\pi e^{-2mR\theta/\pi} d\theta = 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi} d\theta \\
 &= 2RM(R) \frac{-\pi}{2mR} (e^{-mR} - 1) = \frac{\pi}{m} (1 - e^{-mR}) M(R)
 \end{aligned}$$

Es decir que, para R suficientemente grande,

$$\left| \int_{S_R} f(z) e^{imz} dz \right| \leq \frac{\pi}{m} (1 - e^{-mR}) M(R)$$

Dado que $M(R)$ y e^{-mR} tienden a 0 cuando $R \rightarrow \infty$ (pues m es positivo), se tiene que $\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{S_R} f(z) e^{imz} dz \right| = 0$, por lo que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) e^{imz} dz = 0$. \square

En particular, las funciones racionales en las que el grado del denominador es al menos una unidad mayor que el grado del numerador satisfacen el requisito de que $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$.

EJEMPLO 6.38. Calculemos

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(3x)}{x^2 + 1} dx$$

Dicho valor corresponde a la parte imaginaria del valor principal de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i3x}}{x^2 + 1} dx$$

Por el teorema 6.37, este último vale

$$2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z e^{i3z}}{z^2 + 1}, i \right) = 2\pi i \frac{i e^{3i^2}}{2i} = \frac{\pi}{e^3} i$$

Por lo tanto,

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(3x)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e^3}$$

De paso, hemos deducido también que

$$VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(3x)}{x^2 + 1} dx = 0$$

\square

EJERCICIOS

1. Encontrar el desarrollo en Serie de Laurent de las siguientes funciones alrededor de 0:

$$\begin{array}{lll}
 \text{i) } \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} & \text{ii) } \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z} & \text{iii) } z^3 e^{\frac{1}{z}} \\
 \text{iv) } \frac{1}{z} \operatorname{sen}^2 \frac{z}{2} & \text{v) } \frac{e^z - 1}{z} & \text{vi) } \frac{1 + \cos z}{z^4}
 \end{array}$$

2. Desarrollar las siguientes funciones en Serie de Laurent en las regiones indicadas:

- $\frac{1}{z(z+i)}$ en: i) $|z-1| < 1$; ii) $1 < |z-1| < \sqrt{2}$; iii) $|z-1| > \sqrt{2}$; iv) $0 < |z| < 1$; v) $|z| > 1$
- $\frac{1}{z^2(z-3)^2}$ en: i) $0 < |z-3| < 3$; ii) $|z-3| > 3$
- $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ en $|z-1| > 0$

3. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones, y, en los casos en que sean evitables, redefinir la función de modo que sea analítica en ellas.

i) $f(z) = \cosh \frac{1}{z}$ ii) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$ iii) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{senh} z}$ iv) $f(z) = \frac{z^2+z+1}{2z+1-i\sqrt{3}}$

4. El punto z_0 es cero de orden n para la función $f(z)$ y es un cero de orden m para la función $g(z)$. ¿Qué es el punto z_0 , para las funciones $f(z) + g(z)$, $f(z)g(z)$ y $\frac{f(z)}{g(z)}$?

5. Demostrar que si z_0 es singularidad evitable o polo para f , y $f(z_0) = 0$, entonces z_0 es un cero aislado para f . (*Sugerencia:* para las singularidades evitables, considere la expansión en serie para un entorno reducido alrededor de z_0 , observando que $c_0 \neq 0$, y entonces esa expansión define una función no nula y analítica en z_0 . Para los polos, tenga presente que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.)

6. a) Determinar el orden del polo de $(z^2 + 1)/(e^z + 1)$ en $z = i\pi$.
 b) Determinar el orden del polo de $\operatorname{sen} z / \operatorname{senh} z$ en $z = 0$.
 c) Encontrar los polos y determinar sus órdenes, para las siguientes funciones:

i) $\frac{1}{z^4-1}$ ii) $\frac{2z+1-i\sqrt{3}}{(z^2+z+1)^2}$ iii) $\frac{\operatorname{sen} z}{z^{10}(z+1)}$ iv) $\frac{1}{10^z-e^z}$
 v) $\frac{1}{(e^z+1)^4}$ vi) $\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}{(z+\frac{1}{z})^3}$ vii) $\frac{1}{z^{\frac{1}{2}} \operatorname{senh}^4 z}$ viii) $\frac{1}{(1-z^{\frac{1}{2}})^4}$

7. Determinar qué tipo de singularidad es 0 para las siguientes funciones:

i) $\frac{1}{z-\operatorname{sen} z}$ ii) $\frac{1}{e^{-z}+z-1}$ iii) $\frac{\operatorname{sen} z}{e^{-z}+z-1}$

8. Hallar los puntos singulares y determinar su carácter, para las funciones:

i) $\frac{1}{1-\operatorname{sen} z}$ ii) $\frac{1-\cos z}{z^2}$ iii) $e^{\frac{1}{z+2}}$
 iv) $\cos \frac{1}{z}$ v) $\frac{1}{e^{-z}-1} + \frac{1}{z^2}$ vi) $\frac{z \cos \frac{1}{z}}{\cos z-1}$

9. Determinar el carácter de la singularidad en los puntos indicados:

i) $\frac{1+\cos z}{z-\pi}$ ($z_0 = \pi$) ii) $\frac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$ ($z_0 = 1$) iii) $\cos \frac{1}{z+\pi}$ ($z_0 = -\pi$)
 iv) $\frac{\operatorname{Ln}(1+z^3)}{z^2}$ ($z_0 = 0$) v) $\frac{\operatorname{sen}^2 z}{z}$ ($z_0 = 0$) vi) $\cos \frac{1}{z} + \operatorname{sen} \frac{2-\pi z}{2z}$ ($z_0 = 0$)

10. Calcular el residuo en los puntos singulares para las siguientes funciones:

i) $\frac{\tan z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$ ii) $\frac{e^z}{\frac{1}{4}-\operatorname{sen}^2 z}$ iii) $\frac{z}{z^2+4}z + 2i$
 iv) $\frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}$ v) $\cos(\frac{1}{z}) + z^3$ vi) $e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$
 vii) $\frac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$ viii) $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) ix) $\cot^2 z$

11. Calcular las siguientes integrales por el teorema de los residuos, cuando sea posible:

a) $\int_{\gamma} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}} dz$ siendo γ la circunferencia con centro en 0 y radio $\frac{1}{10}$.
 b) $\int_{\gamma} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}} dz$ siendo γ la circunferencia con centro en $\frac{1}{2\pi}$ y radio $\frac{1}{30}$.

12. Verificar los siguientes resultados:

i) $\int_{|z|=1} z \tan(\pi z) dz = 0$ ii) $\int_{|z|=10} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz = 0$
 iii) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz = (1 - \frac{2}{e}) \pi i$ iv) $\int_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = -\frac{\pi}{3} i$
 v) $\int_{|z-1|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz = 2\pi(e-1)i$ vi) $\int_{|z-1|=5} \frac{z}{e^z+3} dz = \frac{-4\pi}{3} i \ln 3$

13. Verificar las siguientes igualdades para integrales reales:

- i) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\rho \cos \theta + \rho^2} = \frac{2\pi}{1-\rho^2}$ para $0 < \rho < 1$ ii) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3 \cos \theta} = \frac{\pi}{2}$
- iii) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2k \sin \theta + \rho^2} = \frac{2\pi}{1-k^2}$ para $k^2 < 1$ iv) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b \cos \theta)^2} = \frac{2a\pi}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$ ($a > b > 0$)

14. Comprobar los siguientes resultados:

- i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}$
- iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 dx}{1+x^8} = 0$ iv) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$

15. Aplicando el teorema de los residuos a funciones de la forma $f(z)e^{imz}$, verificar:

- i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(sx)}{k^2+x^2} dx = \frac{\pi}{k} e^{-ks}$ para $k > 0$ y $s > 0$ ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(sx)}{k^2+x^2} dx = 0$ para $k > 0$ y $s > 0$
- iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{1+x^2} dx = -\frac{2\pi e^{-\sqrt{3}} \sin 1}{\sqrt{3}}$ iv) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$
- v) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx = 0$

16. Sea K compacto y f analítica en K , excepto tal vez en singularidades aisladas que son evitables o polos. Suponga también que f no es idénticamente 0 en K .

- a) Mostrar que f puede tener, a lo sumo, una cantidad finita de singularidades en K . (*Sugerencia:* Suponga que el conjunto S de singularidades es infinito; por teorema 2.29, S tiene punto de acumulación z_0 en K ; muestre que $z_0 \in S$, pero entonces no es una singularidad aislada.)
- b) Mostrar que f puede tener, a lo sumo, una cantidad finita de ceros en K . (*Sugerencia:* para cada $z \in K$, existe $r_z > 0$ tal que $B_{r_z}(z)$ contiene a lo sumo un cero de f ; esa familia de entornos es cubrimiento por abiertos para el compacto K .)

17. Sea $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ con D dominio simplemente conexo, y sea \mathcal{C} un contorno cerrado simple en D . Supongamos que f no tiene ceros sobre \mathcal{C} .

- a) Mostrar que si f es analítica en D , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N$$

en donde \mathcal{C} se recorre en sentido positivo y N es el número de ceros (contando sus órdenes) de f en el interior de \mathcal{C} . (*Sugerencia:* Sea z_0 un cero para f en el interior de \mathcal{C} ; mostrar que debe ser aislado; sea m su orden; entonces $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$; obtenga f' y luego f'/f ; deduzca que esta última tiene un polo simple en z_0 y que el residuo de f'/f en z_0 es m ; concluya el ejercicio aplicando el ejercicio anterior y el Teorema de los Residuos.)

- b) Generalizar el resultado anterior, mostrando que si f es analítica sobre \mathcal{C} y no tiene singularidades esenciales en el interior de \mathcal{C} , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

en donde \mathcal{C} se recorre en sentido positivo, N es el número de ceros (contando sus órdenes) de f en el interior de \mathcal{C} , y P es el número de polos (contando sus órdenes) de f en el interior de \mathcal{C} .

18. Demuestre el *Teorema de Rouché*: Sean f y g dos funciones analíticas sobre un contorno cerrado simple \mathcal{C} y en su interior. Si $|f(z)| > |g(z)|$ para todo $z \in \mathcal{C}$, entonces f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros (contando sus órdenes) dentro de \mathcal{C} . (*Sugerencia:* Defina

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz$$

con $t \in [0, 1]$ y \mathcal{C} recorrido en sentido positivo. Muestre que el denominador del integrando no tiene ceros sobre \mathcal{C} y que ϕ es continua en $[0, 1]$. Aplique entonces el ejercicio anterior para concluir que ϕ es constantemente igual a algún entero. Concluya el ejercicio observando a qué es igual $\phi(0)$ y $\phi(1)$. Para la continuidad de ϕ , probar que

$$|\phi(t) - \phi(t_0)| = \frac{|t - t_0|}{2\pi} \left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{(f(z) + tg(z))(f(z) + t_0g(z))} dz \right|$$

y que, para todo $z \in \mathcal{C}$, el módulo de ese integrando está acotado por $\frac{|f(z)g'(z) - f'(z)g(z)|}{(|f(z)| - |g(z)|)^2}$; por lo tanto, para alguna constante positiva A , es $|\phi(t) - \phi(t_0)| \leq A|t - t_0|$.

19. En cada caso, determinar la cantidad de ceros (contando órdenes) de $p(z)$ en el conjunto R .
 - a) $p(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1$, $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. (*Sugerencia:* $f(z) = -4z^3$, $g(z) = z^7 + z - 1$ y $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ para aplicar el Teorema de Rouché.) (*Solución:* 3)
 - b) $p(z) = z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$, $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. (*Solución:* 4)
 - c) $p(z) = 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$, $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. (*Solución:* 0)
 - d) $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$, $R = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$. (*Solución:* 3)
 - e) $p(z) = e^z - cz^n$ (con n natural, y c complejo de módulo mayor que e), $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. (*Solución:* n)
20. Usando el Teorema de Rouché, demostrar que cualquier polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces (contando multiplicidades). Obtener así una demostración alternativa del Teorema Fundamental del Álgebra. (*Sugerencia:* Sea $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$. Argumentar por qué alcanza con tomar coeficiente unitario en el monomio de mayor grado. Hacer $f(z) = z^n$, $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$, y $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\}$. Mostrar que $|f(z)| > |g(z)|$ sobre y fuera de \mathcal{C} , y aplicar Teorema de Rouché.)

TRANSFORMACIONES EN EL PLANO COMPLEJO

En el capítulo 3 hemos introducido la definición de funciones complejas, y deducido varias propiedades de las funciones complejas analíticas. En este capítulo vamos a continuar con el estudio de las funciones complejas, pero desde otra perspectiva: veremos un estudio sistemático de cómo actúan ciertas familias de funciones sobre determinadas porciones del plano complejo. Es decir, analizaremos el comportamiento de esas funciones como transformaciones de subconjuntos en el plano complejo; no nos interesará tanto la acción puntual de una función, sino la manera en que la función actúa sobre un conjunto dado de puntos. Típicamente, una función *transforma* un conjunto en otro, de allí que emplearemos el término *transformación* cuando queramos hacer hincapié en la acción de una función sobre una porción del plano. Esto es porque el comportamiento y análisis de una función muchas veces se entiende mejor estudiando su acción sobre determinados subconjuntos del plano.

1. Rectas y circunferencias en el plano complejo

En primer lugar, obtendremos una muy útil expresión para representar circunferencias y rectas en el plano complejo, y que posteriormente facilitará la tarea de analizar las transformaciones de estas figuras.

Si por un momento vemos al plano complejo como \mathbb{R}^2 , considerando $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$, y recordamos que en \mathbb{R}^2 una recta no vertical tiene ecuación $y = mx + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$), sustituyendo x e y llegamos a una expresión para la recta en términos del complejo $z = x + iy$:

$$(11) \quad \operatorname{Im} z = m \operatorname{Re} z + n$$

Dado que $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$ y que $\operatorname{Im} z = i(\bar{z} - z)/2$, sustituyendo en (11) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{i(\bar{z} - z)}{2} &= \frac{m(z + \bar{z})}{2} + n \\ \frac{i}{2}\bar{z} - \frac{i}{2}z &= \frac{m}{2}z + \frac{m}{2}\bar{z} + n \\ \left(\frac{m}{2} + \frac{i}{2}\right)z + \left(\frac{m}{2} - \frac{i}{2}\right)\bar{z} + n &= 0 \end{aligned}$$

Llamando $B = \frac{m}{2} + \frac{i}{2}$ y $C = n$, vemos que la ecuación de una recta no vertical en el plano complejo está dada por $Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$, para $B \in \mathbb{C}$ ($B \notin \mathbb{R}$) y $C \in \mathbb{R}$. Procediendo en forma análoga para una recta vertical, cuya ecuación en el plano cartesiano es $x = k$ (para $k \in \mathbb{R}$), obtenemos la expresión $z + \bar{z} + (-2k) = 0$. De todo esto concluimos que, en general, una recta en el plano complejo se representa por una expresión de la forma

$$(12) \quad Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0; \quad B \in \mathbb{C}, B \neq 0, C \in \mathbb{R}$$

o por una expresión que admita ser llevada a esa forma por manipulación algebraica. Recíprocamente, cualquier expresión de la forma (12) representa una recta en el plano complejo.

Observaciones:

- Si $C = 0$, la ecuación corresponde a una recta que pasa por el origen, ya que $(0, 0)$ verifica la ecuación. Si $C \neq 0$, la recta no pasa por el origen.
- Si B y C son tales que se puede obtener una expresión de la forma $z + \bar{z} + D = 0$, con $D \in \mathbb{R}$, resulta $x = -D/2$ lo que representa una recta vertical.

Veamos ahora cómo obtener una expresión para una circunferencia, en términos de z y \bar{z} .

Sabemos que una circunferencia de centro z_0 y radio r puede representarse por la ecuación $|z - z_0| = r$. Trabajando esta expresión, vemos que

$$\begin{aligned}(z - z_0) \overline{(z - z_0)} &= r^2 \\(z - z_0) (\bar{z} - \bar{z}_0) &= r^2 \\z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - r^2 &= 0 \\z\bar{z} + (-\bar{z}_0)z + (-z_0)\bar{z} + (|z_0|^2 - r^2) &= 0\end{aligned}$$

Tomando $A = 1$, $B = -\bar{z}_0$ y $C = |z_0|^2 - r^2$, vemos que una circunferencia en el plano complejo admite una ecuación de la forma:

$$(13) \quad Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0; \quad A, C \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0, \quad B \in \mathbb{C}$$

Recíprocamente, una ecuación de la forma $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ representa una circunferencia en el caso en que A y C sean reales, $A \neq 0$, y el complejo B satisfaga $|B|^2 > AC$; en este caso, el centro de la circunferencia es $z_0 = -\frac{\bar{B}}{A}$ y el radio es $r = \frac{\sqrt{|B|^2 - AC}}{|A|}$.

Observaciones:

- Si $B = 0$, se trata de una circunferencia con centro en el origen.
- La circunferencia pasa por el origen si, y sólo si, $C = 0$.
- Si $B = C = 0$, se tiene una circunferencia degenerada (el origen).

Destaquemos que la ecuación (13) se puede interpretar como una generalización de la ecuación (12), o que esta última corresponde a la (13) con $A = 0$. Entonces, podemos resumir todo diciendo:

La ecuación de una recta o una circunferencia en el plano complejo está dada por:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$$

con A y C números reales, y B complejo.

- Si $A = 0$ (y $B \neq 0$), se tiene una recta (que pasa por el origen si y sólo si $C = 0$).
- Si $A \neq 0$ y $|B|^2 > AC$, se tiene una circunferencia (que pasa por el origen si y sólo si $C = 0$).

2. Transformación de curvas y regiones

¿Cómo determinar geométricamente el transformado de la curva $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) bajo la función f ? Consideremos el sistema de dos ecuaciones en u y v con el parámetro t :

$$\begin{aligned}u &= u(x(t), y(t)) \\v &= v(x(t), y(t))\end{aligned}$$

De ser posible, se procede eliminando t (considerando la restricción $a \leq t \leq b$) para obtener una expresión implícita del tipo $F(u, v) = 0$, que indica la figura en el plano uv que corresponde al transformado de la curva $z(t)$. Alternativamente, puede convenir ver a la curva como subconjunto de \mathbb{R}^2 , y, de ser posible, expresarla como $y = h(x)$ (con adecuadas restricciones para x). Dado que $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, reemplazando, resulta que, cuando z se mueve sobre la curva, es

$$\begin{aligned}u &= u(x, h(x)) \\v &= v(x, h(x))\end{aligned}$$

Aquí tenemos un sistema de dos ecuaciones en u y v con el parámetro x , que, eliminado (sin perder de vista las restricciones, si las hubiere), producirá una expresión de la forma $F(u, v) = 0$ que indicará cuál es el transformado de la curva.

Para representar gráficamente transformaciones utilizaremos dos planos: el plano z (con ejes x e y) para el dominio y el plano w (con ejes u y v) para la imagen, aunque a veces haremos de cuenta que ambos planos están superpuestos.

EJEMPLO 7.1. Sea la curva

$$\mathcal{C} = \{(2 \cos t, 2 \sin t) : 0 \leq t \leq \pi\}$$

Hallar su transformado \mathcal{C}' en el plano w , a través de la función $w = f(z) = z + \frac{1}{z}$.

Solución: Las funciones reales u y v son:

$$u(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

y la curva analizada corresponde a $z(t) = x(t) + iy(t)$ con $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = 2 \sin t$ y $0 \leq t \leq \pi$. Reemplazando en las expresiones de u y v tenemos que, cuando $z \in \mathcal{C}$, es

$$\begin{aligned} u(x(t), y(t)) &= 2 \cos t + \frac{2 \cos t}{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = \frac{5}{2} \cos t \\ v(x(t), y(t)) &= 2 \sin t - \frac{2 \sin t}{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = \frac{3}{2} \sin t \end{aligned}$$

Dado que $0 \leq t \leq \pi$, vemos que $-\frac{5}{2} \leq u \leq \frac{5}{2}$ y $0 \leq v \leq \frac{3}{2}$. Además, eliminando el parámetro t de las ecuaciones para u y v , llegamos a que

$$\frac{u^2}{\frac{25}{4}} + \frac{v^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

Deducimos entonces que el transformado de la curva \mathcal{C} por f es la mitad superior de la elipse con centro en el origen, semieje horizontal $5/2$ y semieje vertical $3/2$. La figura 1 muestra los gráficos correspondientes. \square

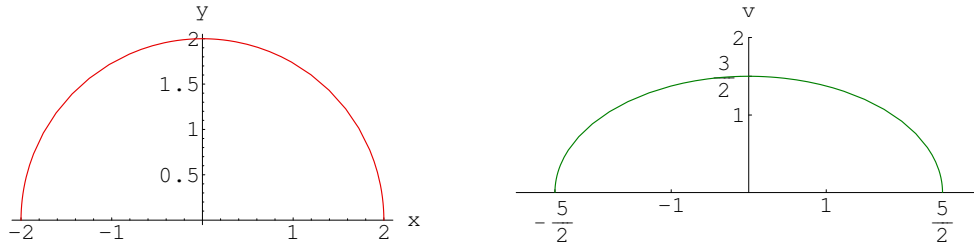


FIGURA 1. Transformación de un semicírculo bajo la función $w = f(z) = z + \frac{1}{z}$

En algunos casos, la porción del plano que se transforma puede ser una *curva infinita* (que, técnicamente, no corresponde a una curva, según nuestra definición). Sin embargo, el procedimiento para encontrar su transformado es esencialmente el mismo que explicamos anteriormente.

EJEMPLO 7.2. Consideremos

$$\mathcal{C} = \{(x, 0) \in \mathbb{C} : x < -1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{C} : x > -1\}$$

Hallar su transformado \mathcal{C}' en el plano w , a través de la función $w = f(z) = z + \frac{1}{z}$.

Solución: Para $z = x + iy$, tenemos $w = u + iv = x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$.

Las funciones reales u y v son:

$$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad y \quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Para $x < -1$: $u = x + \frac{1}{x}$ y $v = 0$. Del gráfico de la función $u(x) = x + \frac{1}{x}$, podemos deducir que $u < -2$.

Para $-1 \leq x < 1$: por ser $x^2 + y^2 = 1$, resulta $u = 2x$ y $v = 0$, de donde obtenemos: $-2 \leq u \leq 2$.

Para $x > 1$: $u = x + \frac{1}{x}$ y $v = 0$. Del gráfico de la función $u(x) = x + \frac{1}{x}$, podemos deducir que $u > 2$.

Por lo tanto, el transformado de \mathcal{C} es

$$\mathcal{C}' = \{(u, v) \in \mathbb{C} : -\infty < u < \infty \wedge v = 0\}$$

El respectivo gráfico se muestra en la figura 2. □



FIGURA 2.

Ahora supongamos que queremos ver en qué se transforma un cierto subconjunto R del dominio de definición de una función compleja $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ bajo la acción de la misma, es decir, $f(R)$. Haremos de cuenta que R , visto como subconjunto de \mathbb{R}^2 , puede ser considerado como la unión infinita de “curvas elementales” (por ejemplo, un disco es una unión de circunferencias, el interior de un cuadrado es una unión de segmentos, etc.) cada una de las cuales depende de algún parámetro. La estrategia será entonces hallar el transformado de una curva elemental genérica (usando la técnica vista más arriba) y ver su imagen, que dependerá del parámetro; luego hacer variar el parámetro y ver qué es lo que resulta. Veamos lo que dijimos a través de ejemplos.

EJEMPLO 7.3. Sea la región $R = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 3, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, hallar su transformado R' en el plano w , a través de la función $w = f(z) = z + \frac{1}{z}$.

Solución: Vamos a considerar a R como la unión infinita de semicircunferencias que dependen de un parámetro r , y vamos a hallar el transformado de una semicircunferencia genérica que también dependerá de r ; finalmente haremos variar este parámetro y determinaremos así la región R' en el plano w .

Hallamos el transformado \mathcal{C}' de la semicircunferencia $\mathcal{C} = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0 \wedge 1 \leq r \leq 3\}$.

$w = f(z) = z + \frac{1}{z} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)i = \left(x + \frac{x}{r^2}\right) + \left(y - \frac{y}{r^2}\right)i = \left(\frac{r^2 + 1}{r^2}\right)x + \left(\frac{r^2 - 1}{r^2}\right)yi$. De aquí deducimos lo siguiente:

$$u = \left(\frac{r^2 + 1}{r^2}\right)x \Rightarrow x = \left(\frac{r^2}{r^2 + 1}\right)u \quad y \quad v = \left(\frac{r^2 - 1}{r^2}\right)y, \text{ con } v \geq 0.$$

$$\text{Por ser } y = \sqrt{r^2 - x^2}: v = \left(\frac{r^2 - 1}{r^2}\right)\sqrt{r^2 - \left(\frac{r^2}{r^2 + 1}\right)^2 u^2} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{r^2 - 1}{r^2}\right)^2 \left(r^2 - \left(\frac{r^2}{r^2 + 1}\right)^2 u^2\right) = \frac{(r^2 - 1)^2}{r^2} - \frac{(r^2 - 1)^2}{(r^2 + 1)^2} u^2.$$

$$\text{Si } r \neq 1, \frac{u^2}{\left(\frac{r^2 + 1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{r^2 - 1}{r}\right)^2} = 1 \text{ con } v \geq 0 \text{ y } 1 < r \leq 3.$$

Si $r = 1$, por ser $u = \left(\frac{r^2 + 1}{r^2}\right)x$ y $v = \left(\frac{r^2 - 1}{r^2}\right)\sqrt{r^2 - \left(\frac{r^2}{r^2 + 1}\right)^2 u^2}$, resulta: $-2 \leq u \leq 2$ y $v = 0$. Entonces:

$$\mathcal{C}' = \{w = (u, v) \in \mathbb{C} : \frac{u^2}{\left(\frac{r^2 + 1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{r^2 - 1}{r}\right)^2} = 1, v \geq 0, 1 < r \leq 3\} \cup \{w = (u, v) \in \mathbb{C} : -2 \leq u \leq 2, v = 0\}$$

En particular, si $r = 3$: $\frac{u^2}{(\frac{10}{3})^2} + \frac{v^2}{(\frac{8}{3})^2} = 1$ con $v \geq 0$. Luego:

$$R' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{C} : \frac{u^2}{(\frac{10}{3})^2} + \frac{v^2}{(\frac{8}{3})^2} \leq 1; v \geq 0 \right\}$$

Vemos la situación gráficamente en la figura 3. □

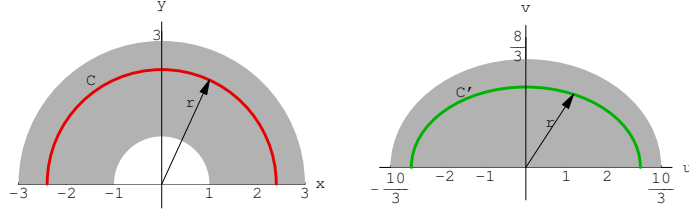


FIGURA 3. Transformación de una región bajo la función $w = f(z) = z + \frac{1}{z}$

EJEMPLO 7.4. Hallar el transformado de la región $R = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 3\}$ bajo la función $f(z) = \frac{1}{4}z^2 + 1$.

Solución: Vamos a considerar a R como la unión infinita de rectas $x = t$ con $1 \leq t \leq 3$, y vamos a hallar el transformado C' de una recta genérica C . Finalmente haremos variar t entre 1 y 3 y determinaremos así, la región R' en el plano w .

$$f(z) = \frac{1}{4}z^2 + 1 = \frac{1}{4}(x + iy)^2 + 1 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 1 + \frac{1}{2}xyi, \text{ donde } u = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 1 \text{ y } v = \frac{1}{2}xy$$

Para un t fijo, consideramos la recta $C = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x = t, t \in [1, 3]\}$.

$$u = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}y^2 + 1 \Rightarrow y^2 = -4u + t^2 + 4$$

$$v = \frac{1}{2}ty \Rightarrow v^2 = \frac{1}{4}t^2y^2 \Rightarrow v^2 = \frac{1}{4}t^2(-4u + t^2 + 4) \Rightarrow u = -\frac{v^2}{t^2} + \left(\frac{1}{4}t^2 + 1\right). \text{ Entonces:}$$

$$C' = \{w = (u, v) \in \mathbb{C} : u = -\frac{v^2}{t^2} + \left(\frac{1}{4}t^2 + 1\right), t \in [1, 3]\}$$

$$\text{Si } t = 1: u = -v^2 + \frac{5}{4}, \text{ y si } t = 3: u = -\frac{v^2}{9} + \frac{13}{4}.$$

Luego:

$$R' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{C} : u + v^2 \geq \frac{5}{4} \wedge u + \frac{v^2}{9} \leq \frac{13}{4} \right\}$$

En la figura 4 se ve el respectivo esquema gráfico. □

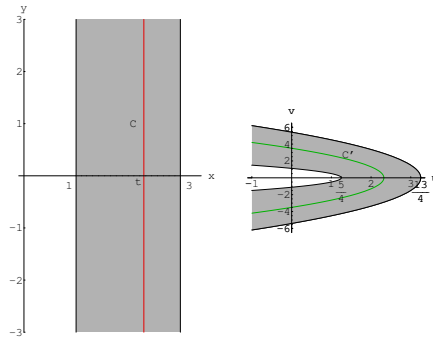


FIGURA 4. Transformación de una región bajo la función $w = f(z) = \frac{1}{4}z^2 + 1$

3. Transformaciones conformes

Supongamos que \mathcal{C}_1 es una curva suave con expresión $z(t)$ ($a \leq t \leq b$), que $z_0 = z(t_0)$ es un punto de ella, y que f es una función definida en un dominio que contiene a \mathcal{C}_1 , analítica en z_0 y con $f'(z_0) \neq 0$. Llamemos \mathcal{C}_2 a la imagen de la curva \mathcal{C}_1 por f , con expresión $w(t) = f(z(t))$ ($a \leq t \leq b$), y $w_0 = w(t_0)$. El vector tangente a \mathcal{C}_1 en z_0 es $z'(t_0)$ y tiene argumento $\phi_1 = \arg z'(t_0)$. En la curva \mathcal{C}_2 , el vector tangente en $w_0 = f(z(t_0))$ es $w'(t_0)$ y su argumento es $\phi_2 = \arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$ pues $w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$. Si llamamos $\alpha = \arg f'(z_0)$, resulta $\phi_2 = \phi_1 + \alpha$. Es decir, el ángulo del vector tangente a la curva transformada en w_0 es el ángulo del vector tangente a la curva sin transformar en z_0 , más la constante real α . Supongamos que \mathcal{C}'_1 es otra curva suave que pasa por z_0 y \mathcal{C}'_2 es su transformada por f . Sea ϕ'_1 el argumento del vector tangente a \mathcal{C}'_1 en z_0 y ϕ'_2 el del vector tangente a \mathcal{C}'_2 en w_0 . Por un razonamiento análogo, $\phi'_2 = \phi'_1 + \alpha$. Entonces, las dos curvas \mathcal{C}'_2 y \mathcal{C}_2 se intersectan en w_0 formando un ángulo $\phi'_2 - \phi_2 = (\phi'_1 + \alpha) - (\phi_1 + \alpha) = \phi'_1 - \phi_1$, vale decir, el mismo ángulo que forman las curvas \mathcal{C}'_1 y \mathcal{C}_1 al intersectarse en z_0 . En otras palabras, el ángulo entre las curvas antes y después de transformarse es el mismo. Las transformaciones que actúan de esta manera (no alterando el ángulo entre curvas que se intersectan) se denominan **transformaciones conformes**. Resumiendo:

PROPOSICIÓN 7.5. *Sea f una función analítica en un punto z_0 . Si $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es una transformación conforme en z_0 .*

Nos preguntamos por la validez de la proposición recíproca. Los desarrollos en series de Taylor nos permiten establecer que la condición de tener derivada no nula es también necesaria para la conformidad de una función analítica.

TEOREMA 7.6. *Sea f una función analítica en z_0 . Se tiene que f es conforme en z_0 si, y sólo si, $f'(z_0) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. La vuelta del enunciado es el contenido de la proposición 7.5. Veamos la ida, por contrarreciprocidad. Supongamos entonces que $f'(z_0) = 0$. Por ser f analítica en z_0 , existe $r > 0$ tal que f admite desarrollo

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j$$

válido para $B = B_r(z_0)$. Como $f'(z_0) = 0$, resulta que, para todo z en B , es

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j$$

Si fuese $f^{(j)}(z_0) = 0$ para todo $j \geq 2$, sería f constante en B , y entonces no sería conforme en z_0 , por lo que la implicación ya estaría establecida. En caso contrario, sea $m \geq 2$ minimal tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Entonces, para todo $z \in B$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \sum_{j=m}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j+m)}(z_0)}{(j+m)!} (z - z_0)^{j+m} \\ &= (z - z_0)^m \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j+m)}(z_0)}{f^{(m)}(z_0)} \frac{m!}{(j+m)!} (z - z_0)^j \end{aligned}$$

Definamos $h : B \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j+m)}(z_0)}{f^{(m)}(z_0)} \frac{m!}{(j+m)!} (z - z_0)^j$$

Por teorema 5.42, $h(z)$ es analítica en z_0 , por lo que es continua en z_0 , y $h(z_0) = 1$. De allí que, para cualquier $z \in B$, es

$$\begin{aligned}\arg(f(z) - f(z_0)) &= \arg(z - z_0)^m + \arg f^{(m)}(z_0) + \arg h(z) - \arg m! \\ &= m \arg(z - z_0) + \arg f^{(m)}(z_0) + \arg h(z)\end{aligned}$$

Sea \mathcal{C}_1 una porción de curva suave contenida en B que pase por z_0 , y \mathcal{C}'_1 su imagen por f . Llamemos θ_1 al ángulo orientado del vector tangente a \mathcal{C}_1 en z_0 , y ϕ_1 al del vector tangente a \mathcal{C}'_1 en $f(z_0)$. Tendremos que

$$\theta_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{C}_1}} \arg(z - z_0) \qquad \phi_1 = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{C}'_1}} \arg(f(z) - f(z_0))$$

de donde, llamando $\alpha = \arg f^{(m)}(z_0)$, es

$$\phi_1 = m\theta_1 + \alpha + \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{C}'_1}} \arg h(z)$$

Siendo h continua en z_0 , $h(z_0) = 1$ y \arg una función continua en 1, es $\arg \circ h$ continua en z_0 , de donde el límite a la derecha en la expresión anterior vale $\arg 1 = 0$, y entonces $\phi_1 = m\theta_1 + \alpha$.

Sea \mathcal{C}_2 otra porción de curva suave contenida en B que pase por z_0 , y \mathcal{C}'_2 su imagen por f . Llamemos θ_2 al ángulo orientado del vector tangente a \mathcal{C}_2 en z_0 , y ϕ_2 al del vector tangente a \mathcal{C}'_2 en $f(z_0)$. Repitiendo el razonamiento anterior, llegamos a que $\phi_2 = m\theta_2 + \alpha$. De allí que $\phi_2 - \phi_1 = m(\theta_2 - \theta_1)$, mostrando que el ángulo orientado entre las curvas \mathcal{C}'_1 y \mathcal{C}'_2 no es igual al formado entre las curvas \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_1 , sino que se amplifica por un factor m . En particular, si elegimos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 formando un ángulo de $2\pi/m$ (es decir, con vectores tangentes en z_0 no colineales), sus imágenes \mathcal{C}'_1 y \mathcal{C}'_2 tendrán vectores tangentes en $f(z_0)$ colineales, por lo que no hay preservación de ángulos. Entonces, f no es conforme en z_0 . \square

En funciones reales, la condición de derivada no nula implica la existencia de un entorno en el cual la función se comporta biyectivamente, según lo afirma el Teorema de la Función Inversa. De hecho, como se verá en los ejercicios, éste es también el caso de las funciones complejas analíticas con derivada no nula en un punto. Por lo tanto, de acuerdo al teorema anterior, si una función f es analítica en z_0 y conforme en z_0 , es una biyección entre algún entorno D de z_0 y su imagen $f(D)$. Es decir, existe una transformación analítica conforme entre D y $f(D)$. Resulta natural preguntarse cuándo hay una transformación analítica conforme entre dos dominios D_1 y D_2 cualesquiera; cuando la hay, decimos que D_1 y D_2 son *conformemente equivalentes*. Por el Teorema de Liouville, resulta inmediato que \mathbb{C} no es conformemente equivalente a ningún dominio acotado. Sin embargo, y de manera algo sorprendente, existe un resultado clásico del área de las transformaciones conformes, conocido como el Teorema de las Transformaciones Conformes de Riemann, que asegura que cualquier dominio simplemente conexo que no sea el plano completo es conformemente equivalente al disco unitario $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

4. Transformaciones por funciones elementales

En esta sección, veremos cómo actúan funciones analíticas más bien simples, sobre curvas y regiones del plano complejo.

4.1. Traslaciones. Una traslación es una transformación de la forma

$$f(z) = z + b \qquad b \in \mathbb{C}$$

Cualquier complejo z , bajo la acción de una traslación, se traslada según el vector constante b (recordar la interpretación geométrica de la suma de complejos). Resulta entonces que la imagen de cualquier subconjunto de \mathbb{C} es una copia de ese subconjunto, desplazada según la dirección, sentido y módulo de b . En particular, una recta se transforma en una recta, y un círculo en un círculo de igual diámetro.

4.2. Rotaciones con cambio de escala. Una rotación es una transformación de la forma

$$f(z) = az \quad a \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Hemos excluido el caso $a = 0$ pues de lo contrario la función sería trivial.

¿Por qué se puede llamar “rotación”? Por lo que hemos visto acerca de la multiplicación de números complejos: el producto tiene argumento igual a la suma de los argumentos de los factores. Como a es una constante, cada z del plano, al aplicársele la función, rota un ángulo igual al argumento de a alrededor del origen. Por otro lado, el módulo del producto es el producto de los módulos; luego, el complejo resultante, az , tendrá módulo $|az| = |a||z|$. Por ésto, az estará más cerca del origen que z si $|a| < 1$, más lejos si $|a| > 1$, y a igual distancia del origen si $|a| = 1$. De allí la otra parte del nombre, “cambio de escala”. El cambio de escala se llama **expansión** o **dilatación** cuando $|a| > 1$ y **contracción** cuando $|a| < 1$. Si $|a| = 1$, la transformación es isométrica.

De acuerdo a lo dicho, es claro que una recta se transforma en otra recta y un círculo en otro círculo (posiblemente de distinto diámetro). Corroboraremos ésto analíticamente, usando la ecuación (1) que representa rectas o circunferencias:

Sea $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ la ecuación de una recta o un círculo ($A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}$). Hagamos $w = az$, por lo que $z = w/a$ y $\bar{z} = \bar{w}/\bar{a}$. Reemplazando en la ecuación de la recta o el círculo, queda

$$\begin{aligned} A \frac{w\bar{w}}{a\bar{a}} + B \frac{w}{a} + \bar{B} \frac{\bar{w}}{\bar{a}} + C &= 0 \\ A'w\bar{w} + B'w + \bar{B}'\bar{w} + C &= 0 \end{aligned}$$

donde $A' = \frac{A}{|a|^2} \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ y $B' = \frac{B}{a} \in \mathbb{C}$. Es decir, llegamos a la ecuación de una recta o una circunferencia en el plano w . Más aún, si partimos de una recta ($A = 0$) en el plano z , llegamos a otra recta ($A' = 0$) en el plano w , y si partimos de una circunferencia ($A \neq 0$) llegamos a otra circunferencia ($A' \neq 0$).

4.3. Transformaciones lineales. Son las transformaciones de la forma

$$f(z) = az + b \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

Como puede verse, una transformación lineal es la composición de una rotación y cambio de escala con una traslación. De este modo, es fácil analizar el transformado de una figura cualquiera a través de una función lineal: primero hay que rotarla alrededor del origen un ángulo igual al argumento de a , luego cambiarle la escala (de acuerdo a $|a|$), y finalmente trasladarla según el vector b . La figura 5 muestra, al centro, un conjunto de origen que, por distintas transformaciones lineales, genera los otros cuatro dibujos.

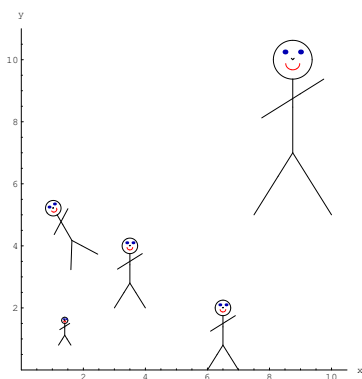


FIGURA 5. Ejemplos de transformaciones lineales

Ya conociendo cómo trabajan las rotaciones con cambio de escala y las traslaciones, deducimos que las transformaciones lineales, como composición de ambas, transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

4.4. Inversión. Las transformaciones lineales consisten en semejanzas, que transfieren rectas en rectas y son conformes. El propósito, ahora, es estudiar una transformación que es *no lineal*, conocida como *inversión*. Inventada por Magnus en 1831, novedosa en un aspecto, pero conocida en otro, la inversión transforma rectas o circunferencias en rectas o circunferencias, y es conforme.

La inversión es la transformación definida por:

$$w = f(z) = \frac{1}{z}$$

Observamos que ésta es una función uno a uno entre los puntos no nulos del plano complejo.

Dado un punto $z \neq 0$, ¿dónde se encuentra el transformado? Usando expresión exponencial, observamos rápidamente que, haciendo $w = 1/z$, tenemos que

$$|w| = \frac{1}{|z|} \quad \arg w = -\arg z$$

por lo que concluimos que (ver figura 6):

El punto $w = \frac{1}{z}$ se encuentra en la dirección del conjugado de z , a la distancia $\frac{1}{|z|}$ del origen.

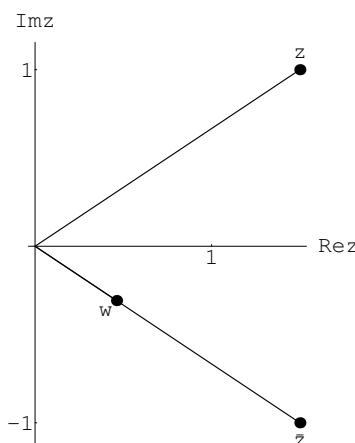


FIGURA 6.

Es fácil chequear que la inversión es involutiva: $f(f(z)) = z$. Además es una transformación conforme en todo su dominio.

Si $w = 1/z$, tendremos que $z = 1/w$ y $\bar{z} = 1/\bar{w}$. Entonces, si $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ ($A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{C}$) es la ecuación de una recta o una circunferencia, por reemplazo obtenemos

$$A \frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} + B \frac{1}{w} + \bar{B} \frac{1}{\bar{w}} + C = 0$$

Multiplicando miembro a miembro por $w\bar{w}$, resulta

$$Cw\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0$$

Esta expresión nos permite visualizar de modo directo que la inversión transforma una recta o circunferencia en otra recta o circunferencia –no necesariamente preservándose el tipo de figura. Más específicamente:

FIGURA	SE TRANSFORMA EN
Recta que pasa por el origen ($A = 0 = C$)	Recta que pasa por el origen
Recta que no pasa por el origen ($A = 0, C \neq 0$)	Circunferencia que pasa por el origen
Circunferencia que pasa por el origen ($A \neq 0, C = 0$)	Recta que no pasa por el origen
Circunferencia que no pasa por el origen ($A \neq 0 \neq C$)	Circunferencia que no pasa por el origen

4.4.1. *Circunferencia de inversión.* Si $z = re^{i\theta}$, para hallar los puntos fijos en la inversión planteamos la ecuación $f(z) = z$, es decir, $\frac{1}{z} = z$, que nos conduce a $z^2 = 1$, es decir, $z = \pm 1$.

O sea que los puntos fijos de la inversión son 1 y -1 .

¿Qué pasa con los puntos que están sobre la circunferencia unitaria con centro en el origen?

$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Obtenemos otro complejo sobre la circunferencia; precisamente, obtenemos su conjugado.

De todo lo anterior, podemos concluir que:

Si $|z| = 1$, su inverso está sobre la circunferencia

Si $|z| < 1$, su inverso está fuera de la circunferencia

Si $|z| > 1$, su inverso está dentro de la circunferencia

Por esta razón, la circunferencia unitaria centrada en el origen se llama *circunferencia de inversión*.

Nótese que:

los puntos de la circunferencia de inversión, en general, no son fijos, pero

la circunferencia de inversión es invariante por inversión

Las figuras 7 y 8 muestran gráficas con ejemplos de la acción de la inversión (respectivamente, a la izquierda aparece el conjunto original, y a la derecha el transformado por inversión). Téngase en cuenta las escalas de cada dibujo (en la figura 7, para una mejor apreciación, hemos dibujado también la circunferencia de inversión en el plano z).

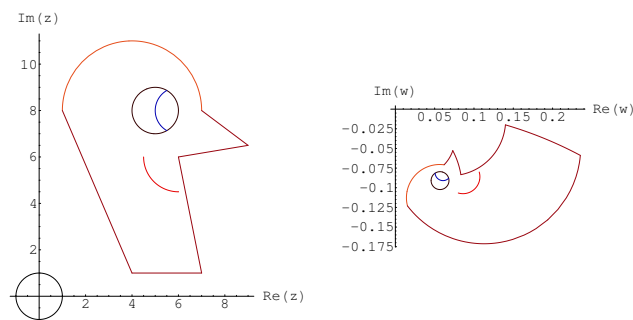


FIGURA 7. Inversión de un conjunto exterior al círculo unitario

4.4.2. *Inversión en el plano ampliado.* La inversión establece una correspondencia biyectiva en $\mathbb{C} - \{0\}$. Podemos extender esta correspondencia para incluir al 0, a condición de que también incorporemos el punto del infinito. Formalmente, se define la transformación $f_\infty : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ mediante:

$$w = f_\infty(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{si } z \neq 0 \wedge z \neq \infty \\ \infty, & \text{si } z = 0 \\ 0, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Observamos que f_∞ restringida a $\mathbb{C} - \{0\}$ es la inversión definida anteriormente. Esta función es continua y biyectiva en el conjunto \mathbb{C}_∞ .

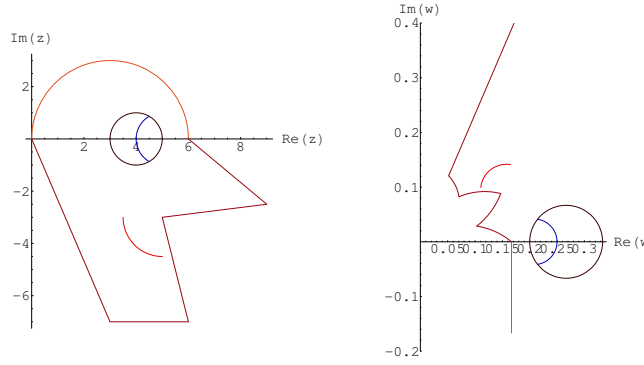


FIGURA 8. Otro ejemplo de inversión

4.5. Transformaciones de Möbius. Estudiaremos ahora un tipo de transformaciones que engloba a las transformaciones lineales y a la inversión previamente estudiadas. Se trata de las transformaciones **bilineales**, también conocidas como **homográficas** o **de Möbius**. Son de la forma:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, c \neq 0 \vee d \neq 0$$

Observamos que si $c = 0$ estamos en el caso de una transformación lineal, mientras que si $a = d = 0$ y $b = c = 1$ es una inversión.

Notemos que si fuese $ad - bc = 0$, tendríamos que

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(z + \frac{b}{a})}{c(z + \frac{d}{c})} = \frac{a(z + \frac{b}{a})}{c(z + \frac{b}{a})} = \frac{a}{c}$$

con lo cual la función sería una constante. Para evitar este caso trivial, establecemos el requisito de que $ad - bc \neq 0$.

Suponiendo que $c \neq 0$, podemos extender estas transformaciones a \mathbb{C}_∞ del siguiente modo:

$$w = f_\infty(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & \text{si } z \neq -\frac{d}{c} \wedge z \neq \infty \\ \infty, & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

4.5.1. Propiedades.

1. La composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius.

Para verlo, sean $f_1(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ (con $ad - bc \neq 0$), y $f_2(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$ (con $a'd' - b'c' \neq 0$).

La composición resulta:

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(z) &= f_2(f_1(z)) = \frac{a' \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + b'}{c' \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + d'} = \frac{a'az + a'b + b'cz + b'd}{c'az + c'b + d'cz + d'd} \\ &= \frac{(a'a + b'c)z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)z + c'b + d'd} \end{aligned}$$

Debe cumplirse que $(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) \neq 0$. Veamos que así es:

$$\begin{aligned} (a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) &= a'ad'd + b'cc'b - a'bd'c - b'dc'a \\ &= ad(a'd' - b'c') - bc(a'd' - b'c') \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0, \end{aligned}$$

por ser $ad - bc \neq 0$ y $a'd' - b'c' \neq 0$

2. Una transformación de Möbius con $c \neq 0$, puede representarse como la composición de una traslación, una inversión, una rotación y cambio de escala y una traslación.

En efecto, si $c \neq 0$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a\left(z + \frac{d}{c} - \frac{d}{c}\right) + b}{c\left(z + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a\left(z + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c} + b}{c\left(z + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{\left(z + \frac{d}{c}\right)}$$

Esta expresión es la secuencia de las siguientes funciones:

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c} \quad \text{Traslación}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z} \quad \text{Inversión}$$

$$f_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} z \quad \text{Rotación y Cambio de Escala}$$

$$f_4(z) = z + \frac{a}{c} \quad \text{Traslación}$$

Por lo tanto, una transformación de Möbius transforma una recta o circunferencia en una recta o circunferencia, ya que es composición de transformaciones que operan de esa manera.

EJERCICIOS

- Considerar las transformaciones $f_1(z) = 2z - 1$ y $f_2(z) = z^2$.
 - Para cada una de ellas, obtener el transformado de:
 - la recta $y = 0$, la recta $x = 0$, la recta $y = x$ y la recta $y = -x$.
 - la recta $y = ax$ con $a \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$.
 - Sean r_1 la recta $y = 2x$ y r_2 la recta $y = 3x$.
 - Calcular el ángulo α que forman r_1 y r_2 en su punto de intersección.
 - Calcular el ángulo que forman los transformados por f_1 de r_1 y r_2 , en su punto de intersección. Compararlo con α .
 - Calcular el ángulo que forman los transformados por f_2 de r_1 y r_2 , en su punto de intersección. Compararlo con α .
- Escribir una ecuación de la forma $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ para cada una de las siguientes figuras:
 - Recta que pasa por $1 - i$ y $2 - i$.
 - Recta horizontal que pasa por $2i$.
 - Recta vertical que pasa por $1 - 3i$.
 - Círculo que pasa por el origen, con centro $-2 + i$.
 - Círculo tal que uno de sus diámetros es el segmento que va de $-1 - i$ a $2 + 3i$.
- Decidir cuáles de las siguientes expresiones representan una recta o una circunferencia, y, en ese caso, graficar el correspondiente conjunto de puntos.
 - $iz\bar{z} + (3 - i)z + (3 + i)\bar{z} + 4i = 0$
 - $iz\bar{z} + (3 - i)z + (-3 - i)\bar{z} + 4i = 0$
 - $(3 - i)z + (-3 - i)\bar{z} + 4i = 0$
 - $(3 - i)z + (-3 - i)\bar{z} + 4 = 0$
- Sea $R = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2 \wedge 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$. Determinar el transformado de R bajo las funciones $f_1(z) = z + (1 - 2i)$, $f_2(z) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$ y $f_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + (1 - 2i)$.
- Dado un triángulo T con vértices z_1, z_2, z_3 , y $f(z) = az + b$, encontrar el área de $f(T)$ en función del área de T . (*Sugerencia:* el área de un rectángulo se puede obtener como la norma del producto vectorial de sus vectores lado.)
- Encontrar el transformado del rectángulo de vértices $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 4)$ bajo la transformación $w = e^z$.

7. Encontrar el transformado de la banda $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $y \geq 0$ bajo la función $w = \sin z$.
8. Sean z_1, z_2, w_1 y w_2 números complejos con $z_1 \neq z_2$. Mostrar que existe una única transformación lineal f tal que $f(z_1) = w_1$ y $f(z_2) = w_2$.
9. Sea S el perímetro del rombo cuyos vértices son i , $-1/2$, $-i$ y $1/2$. Sea T el perímetro del rombo con vértices en 0 , $-2+i$, -4 y $-2-i$. Obtener dos transformaciones lineales *distintas* tales que el transformado del rombo S sea T .
10. Para cada una de las siguientes funciones, determinar el conjunto de puntos en los que determinan una transformación conforme.

$$iz + (1 - i) \qquad \frac{z^2 + 1}{z - i} \qquad \sin \frac{1}{z}$$

11. Encontrar todas las transformaciones lineales que tengan a i como punto fijo.
12. Mostrar que por medio de la transformación $w = 1/z$, el círculo C dado por $|z - 3| = 5$ se transforma en el círculo $|w + 3/16| = 5/16$. ¿En que región se transforma el interior del círculo?
13. Determinar la ecuación de la curva en el plano w en la cual la línea recta $x + y = 1$ se transforma por:
 - (a) $w = z^2$
 - (b) $w = 1/z$
14. En la figura 9, al dibujo de la izquierda se le aplicó una inversión $1/z$. Identificar, en la figura de la derecha, la imagen de cada trazo que compone la figura de la izquierda.

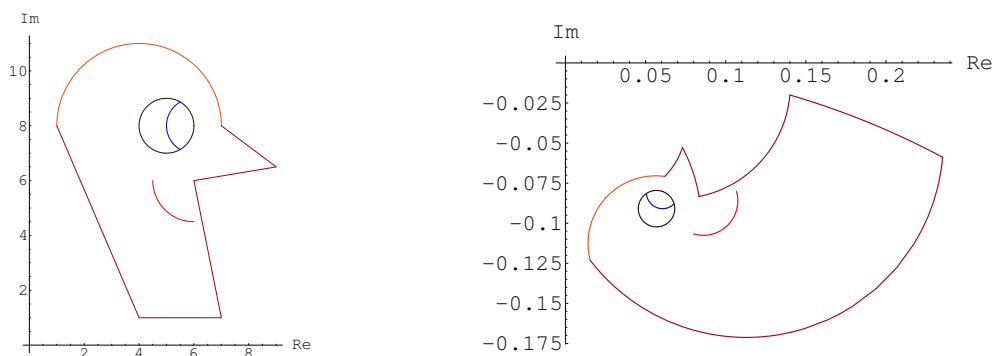


FIGURA 9.

Proceder de igual forma para los dibujos mostrados en la figura 10.

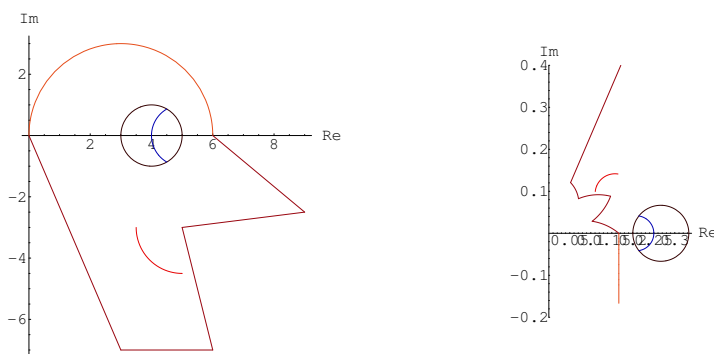


FIGURA 10.

15. Hallar los puntos fijos de la transformación bilineal $w = \frac{2z - 5}{z + 4}$.
16. a) Considerar la transformación bilineal $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ con $ad \neq bc$. Sean z_1, z_2, z_3 y z_4 números complejos dos a dos distintos, y sea $w_i = f(z_i)$ para $1 \leq i \leq 4$. Mostrar que
- $$\frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_3 - w_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}$$
- b) Hallar una transformación bilineal que aplica los puntos z_1, z_2, z_3 (dos a dos distintos) del plano z en los puntos w_1, w_2, w_3 del plano w respectivamente. Hallar una transformación bilineal que aplica los puntos $0, -i, -1$ en $i, 1, 0$ respectivamente.
17. Si z_0 está en el semiplano superior del plano z y θ_0 es cualquier número real, mostrar que la transformación bilineal $w = e^{i\theta_0} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right)$ aplica el semiplano superior del plano z en el interior del círculo unidad del plano w , es decir, $|w| \leq 1$.
18. Hallar una transformación bilineal que aplica el semiplano superior del plano z en el círculo unidad del plano w de tal manera que $z = i$ se aplica en $w = 0$, mientras que el punto en el infinito se aplica en $w = -1$.
19. Sea $f(z)$ analítica en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$. Mostrar que f es inversible en algún entorno de z_0 , y que la derivada de la función inversa es $1/f'(z)$. (*Sugerencia:* Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Busque un entorno de z_0 en que f' no se anule y en el que u, v y sus derivadas parciales de cualquier orden sean continuas. El par de ecuaciones $u = u(x, y), v = v(x, y)$ representa una transformación del entorno con jacobiano no nulo, por lo que es aplicable el Teorema de la Función Inversa.)
20. Un dominio G_1 del plano complejo se dice *conformemente equivalente* a otro dominio G_2 si existe una biyección $f : G_1 \rightarrow G_2$ que es conforme en G_1 . Demuestre que la relación de ser conformemente equivalentes es de equivalencia.

DINÁMICA EN EL PLANO COMPLEJO: FRACTALES

En este último capítulo, se presentará una fascinante aplicación de las funciones de variable compleja: los fractales. Veremos distintos mecanismos para generarlos, y trataremos de mostrar algunas de las cuestiones matemáticas que los sustentan. Nos basaremos, para ello, en varias de las propiedades ya aprendidas para el sistema de los números complejos.

1. Conjuntos de Julia

Veremos ahora cómo generar conjuntos con imágenes vistosas, en base a ideas realmente muy sencillas.

1.1. Iteraciones, órbitas, escape. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja definida en todo el plano. f puede verse como una *máquina procesadora* que, alimentada con z_0 , produce $f(z_0)$. ¿Qué ocurriría si alimentásemos la procesadora con el número $f(z_0)$? Obtendríamos el complejo $f(f(z_0))$, denominado la *composición* de f consigo misma, aplicada a z_0 , y denotada $(f \circ f)(z_0)$. A su vez, podemos nuevamente alimentar a la máquina con este número, y obtendríamos $f(f(f(z_0))) = (f \circ f \circ f)(z_0)$. Si repitiéramos indefinidamente este proceso, generaríamos una sucesión de números complejos que se denomina la *órbita de z_0 bajo la función f* . Formalizamos esto de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 8.1. Dados un número complejo z_0 y una función de variable compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se define la **órbita de z_0 bajo f** a la sucesión de números complejos $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ cuyo primer elemento es z_0 y, para $k > 0$, el k -ésimo término es $z_k = f(z_{k-1})$.

Como puede constatarse a partir de la definición, el k -ésimo término de la órbita corresponde a la composición de f consigo misma k veces, aplicada a z_0 . Denotaremos $f^{[k]}$ a la función que resulta de componer f consigo misma k veces (convenimos que $f^{[0]}$ es la función identidad), de modo que el k -ésimo término de la órbita de z_0 es $f^{[k]}(z_0)$, y la órbita completa de z_0 es la sucesión $\{f^{[k]}(z_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

El proceso que conduce a la obtención de la órbita de z_0 se denomina *iterativo*, pues consiste en aplicar reiterativamente la función f a lo que salió en la etapa anterior. El hecho de aplicar f en cada paso se llama una *iteración*.

Si imaginamos a f como una acción que mueve partículas en el plano (de modo que una partícula en posición correspondiente al complejo z , luego de aplicada la acción, queda en $f(z)$) que se aplica a intervalos regulares de tiempo, y a k como indicador de tiempo, podríamos interpretar a $f^{[k]}(z_0)$ como la posición, al instante k , de una partícula que inicialmente se encontraba en z_0 . Se tiene así un proceso dinámico. Interesa entonces saber cuál es el *destino final* de esa partícula, o, en otras palabras, qué ocurre con la órbita de z_0 .

DEFINICIÓN 8.2. Sea f una función de variable compleja, y z_0 un número complejo. z_0 es un **punto fijo para f** si $f(z_0) = z_0$. Se dice que z_0 es un **punto finalmente fijo para f** si existe $n \geq 0$ tal que $f^{[n+1]}(z_0) = f^{[n]}(z_0)$. El complejo z_0 es un **punto periódico para f** si existe $m \geq 1$ tal que $f^{[m]}(z_0) = z_0$ (en tal caso, m se denomina un **período** de z_0). El punto z_0 es un **punto finalmente periódico para f** si existen $n \geq 0, m \geq 1$ tales que $f^{[n+m]}(z_0) = f^{[n]}(z_0)$ (tal m se denomina un **período final** de z_0). Se dice que la órbita de z_0 bajo f **no escapa** si existe $R > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |f^{[n]}(z_0)| < R$; en caso contrario, se dice que la órbita de z_0 bajo f **escapa**.

Gráficamente hablando, la órbita de z_0 escapa si no hay un círculo de radio finito capaz de contener a toda la órbita. Visto en proyección estereográfica, significa que la órbita posee términos arbitrariamente cercanos al polo norte.

La órbita de un punto fijo tiene la forma

$$\{z_0, z_0, z_0, \dots\},$$

la de uno finalmente fijo es de tipo

$$\{z_0, z_1, \dots, z_n, z_n, z_n, \dots\},$$

la de uno periódico de período m tiene forma

$$\{z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, \dots\},$$

y la de un punto finalmente periódico de período final m es de tipo

$$\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m-1}, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m-1}, \dots\}$$

EJEMPLO 8.3. Sea $f(z) = z^2$. Los complejos 0 y 1 son puntos fijos para f , mientras que $e^{i2\pi/3}$ y $e^{i4\pi/3}$ son periódicos de período 2. El punto -1 es finalmente fijo, y $e^{i\pi/6}$ es finalmente periódico con período final 2. En general, si consideramos $z_0 = re^{i\theta}$, se puede verificar fácilmente que para todo $k \geq 0$, es $f^{[k]}(z_0) = r^{2^k} e^{i2^k\theta}$. Entonces, si $|z_0| > 1$, la órbita de z_0 escapa, mientras que si $|z_0| < 1$, la órbita converge a 0, y para $|z_0| = 1$, la órbita es una sucesión que permanece en el círculo unitario. \square

OBSERVACIÓN 8.4. Si z_k es el k -ésimo término de la órbita de z_0 bajo f , la órbita de z_k bajo f es la misma que la de z_0 , excepto que con los primeros k términos eliminados. Esto es porque el n -ésimo término de la órbita de z_k bajo f es $f^n(z_k) = f^n(f^k(z_0)) = f^{k+n}(z_0)$. Por ello, las órbitas de z_0 y de z_k bajo f tienen ambas el mismo destino.

1.2. Conjuntos de Julia. El hecho de que una órbita escape o no, depende de la función f y del z_0 inicial. En nuestro ejemplo 8.3, tuvimos la posibilidad de realizar una deducción analítica, pero no siempre es el caso, y para que el lector lo compruebe en carne propia, lo invitamos a determinar cuáles son los z_0 cuyas órbitas no escapan bajo la función $f(z) = z^2 - 1$.

DEFINICIÓN 8.5. Sea f una función de variable compleja. Se denomina **conjunto de Julia relleno asociado a f** , denotado \mathcal{J}_f^R , al conjunto de todos los números complejos cuya órbita bajo f no escapa. La frontera de este conjunto se denomina **Conjunto de Julia asociado a f** , y se denota mediante \mathcal{J}_f .

Por lo tanto, dada f , para determinar \mathcal{J}_f^R hay que encontrar todos los z_0 cuya órbita bajo f no escapa. Ésta es una tarea en general dificultosa de realizar por métodos analíticos, excepto en unos pocos casos como el del ejemplo 8.3, para el cual, como dedujimos, el conjunto de Julia relleno es el disco unitario, y el Conjunto de Julia es la circunferencia unitaria con centro en el origen.

Un intento de salvar el inconveniente podría ser calcular explícitamente la órbita de cada z_0 , pero chocamos con un doble problema: por un lado, cada órbita se compone de infinitos términos (esto representa un *infinito temporal*), y por otro, habría que analizar infinitas órbitas pues hay infinitos z_0 posibles en \mathbb{C} (lo cual representa un *infinito espacial*).

Entonces acomodemos un poco el intento para solucionar el doble problema: por un lado, calculemos la órbita de *unos cuantos* z_0 , y, por otro, no calculemos todos los términos de cada órbita, sino *unos cuantos*, a ver si podemos establecer una tendencia de escape. De hecho, esto fue lo primero que los investigadores se propusieron hacer cuando aparecieron estas ideas allá por 1920 (en base a trabajos del matemático francés Gaston Julia) pero pronto desistieron, por la densidad de los cálculos que, hechos a mano, abruman. Sin embargo, con el advenimiento masivo de las computadoras a partir de 1980, fue posible hacer estos cálculos rápidamente, y obtener los asombrosos conjuntos de Julia asociados, por ejemplo, a $f(z) = z^2 - 1$ o $f(z) = \sin z$.

Una cuestión que debe haber dejado intrigado al lector es la determinación de lo que significa *unos cuantos*, tanto en número de iteraciones como en posibles valores de z_0 . Nuevamente, esto depende de f . En la siguiente sección, abordaremos estas cuestiones para un caso especial, pero de gran riqueza.

1.3. La familia cuadrática. Para cada $c \in \mathbb{C}$, consideremos la función $f_c(z) = z^2 + c$. La familia de todas estas funciones se denomina la *familia cuadrática*, por obvias razones, y realizaremos aquí algunas consideraciones sobre las órbitas asociadas a los elementos de esta familia. Cada función de la familia queda determinada a través del *parámetro* c .

Obsérvese que la derivada de cualquier miembro de la familia es $f'_c(z) = 2z$, y por lo tanto cada función cuadrática es una transformación conforme excepto en el *punto crítico* 0. Esta circunstancia hace que el complejo nulo aparezca como destacado, y entonces podríamos preguntarnos qué ocurre con la órbita de 0 bajo una función cuadrática. El siguiente resultado responde parcialmente a esta cuestión.

TEOREMA 8.6. *Si c es un complejo de módulo mayor que 2, entonces la órbita de 0 bajo f_c escapa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| > 2$. Quiere decir que $|c| = 2 + \delta$ para algún $\delta > 0$. Veamos, por inducción en $n \geq 1$, que $|f^{[n]}(0)| \geq 2 + n\delta$. Para $n = 1$, $|f^{[1]}(0)| = |f(0)| = |0^2 + c| = |c| = 2 + \delta$, verificándose la base del proceso inductivo. Ahora supongamos que $|f^{[n]}(0)| \geq 2 + n\delta$, y comprobemos la aseveración para $n + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |f^{[n+1]}(0)| &= \left| f\left(f^{[n]}(0)\right) \right| = \left| \left(f^{[n]}(0)\right)^2 + c \right| \geq \left| \left(f^{[n]}(0)\right)^2 \right| - |c| = \left| f^{[n]}(0) \right|^2 - |c| \\ &\geq (2 + n\delta)^2 - |c| = 4 + 4n\delta + n^2\delta^2 - 2 - \delta = 2 + (4n - 1)\delta + n^2\delta^2 \\ &\geq 2 + (4n - 1)\delta \geq 2 + (n + 1)\delta \end{aligned}$$

completando la inducción.

Dado que para todo $n \geq 1$ es $|f^{[n]}(0)| \geq 2 + n\delta$, y que $2 + n\delta$ tiende a ∞ con n , se tiene que la órbita de 0 bajo f_c escapa. \square

Por razones que veremos más adelante, nos interesará restringirnos a valores de c tales que la órbita de 0 bajo f_c no escapa, por lo cual, en vistas del teorema 8.6, en la consideración de la familia cuadrática, nos vamos a restringir a valores complejos de c que tengan módulo menor o igual que 2.

TEOREMA 8.7. *Sea c un complejo tal que $|c| \leq 2$. Entonces, la órbita de cualquier complejo de módulo mayor que 2 bajo f_c escapa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0| > 2$. Quiere decir que $|z_0| = 1 + \delta$ para algún $\delta > 1$. Veamos, por inducción en $n \geq 1$, que $|f^{[n]}(z_0)| \geq 1 + \delta^n$. Para $n = 1$, $|f^{[1]}(z_0)| = |z_0^2 + c| \geq |z_0|^2 - |c| \geq (1 + \delta)^2 - 2 = 1 + 2\delta + \delta^2 - 2 = 2\delta + (\delta - 1)(\delta + 1) \geq 2\delta \geq 1 + \delta$, verificándose la base del proceso inductivo. Ahora supongamos que $|f^{[n]}(z_0)| \geq 1 + \delta^n$, y comprobemos la aseveración para $n + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |f^{[n+1]}(z_0)| &= \left| f\left(f^{[n]}(z_0)\right) \right| = \left| \left(f^{[n]}(z_0)\right)^2 + c \right| \geq \left| \left(f^{[n]}(z_0)\right)^2 \right| - |c| = \left| f^{[n]}(z_0) \right|^2 - |c| \\ &\geq (1 + \delta^n)^2 - |c| \geq 1 + 2\delta^n + \delta^{2n} - 2 = 1 + 2(\delta^n - 1) + \delta^{2n} \geq 1 + \delta^{n+1} \end{aligned}$$

con lo que queda establecida la inducción.

Dado que para todo $n \geq 1$ es $|f^{[n]}(z_0)| \geq 1 + \delta^n$, y que $1 + \delta^n$ tiende a ∞ con n (por ser $\delta > 1$), se tiene que la órbita de z_0 bajo f_c escapa. \square

1.3.1. El método directo. Los resultados anteriores nos proporcionan un criterio para acotar la búsqueda de los z_0 cuya órbita no escapa, en el caso en que la función sea un miembro de la familia cuadrática cuyo parámetro tenga módulo menor o igual que 2: considerar sólo los z_0 en el disco de radio 2 con centro en el origen. Igual siguen siendo infinitos, pero hemos progresado bastante, pues también podemos ver que si algún punto de la órbita de z_0 cae fuera de ese disco, la órbita de z_0 escapa con seguridad (recordar la observación 8.4).

En relación a la infinitud de los posibles z_0 en el disco, podríamos considerar sólo los z_0 que se encuentren en los vértices de una malla de paso pequeño, digamos ε . Es decir, calcular las órbitas de todos los complejos de la forma $(k\varepsilon, j\varepsilon)$, con k y j enteros satisfaciendo

$$-\frac{2}{\varepsilon} \leq k \leq \frac{2}{\varepsilon} \quad -\frac{2}{\varepsilon} \leq j \leq \frac{2}{\varepsilon}$$

(si bien algunos de ellos corresponden a complejos de módulo mayor que 2, se simplifica la tarea computacionalmente.)

Con esta discretización, hemos soslayado el problema del infinito espacial, pues sólo calcularemos la órbita de una cantidad finita de puntos, a cambio de que obtendremos sólo un esbozo del verdadero conjunto de Julia relleno. El esbozo será tanto más parecido al conjunto verdadero cuanto más pequeño sea el valor de ε .

¿Y cómo soslayar el problema del infinito temporal? Podemos fijar un N , y calcular los primeros N términos de la órbita de cada z_0 ; si en el cálculo aparece un término de módulo mayor que 2, ya sabemos que la órbita de z_0 escapa; si ninguno de esos términos tiene módulo mayor que 2, pronunciamos por decreto que no escapa (aún cuando tal vez, en alguna iteración posterior, efectivamente pudiera aparecer un término de módulo mayor que 2). De nuevo, obtenemos un esbozo del verdadero conjunto, tanto más parecido cuanto mayor sea N .

A pesar de las dos aproximaciones (la discretización del plano y la obtención de los N primeros términos de cada órbita), los conjuntos que se obtienen suelen ser bastante aproximados a los verdaderos conjuntos.

En resumen, podemos proceder de la siguiente manera, para tener una gráfica aproximada del conjunto de Julia relleno asociado a un miembro de la familia cuadrática cuyo parámetro c sea de módulo a lo sumo 2:

1. Fijar ε real positivo y N entero positivo.
2. Para cada pareja de enteros k, j tales que $-\frac{2}{\varepsilon} < k < \frac{2}{\varepsilon}$, $-\frac{2}{\varepsilon} < j < \frac{2}{\varepsilon}$, calcular los N primeros términos de la órbita del complejo $(k\varepsilon, j\varepsilon)$. Si alguno de ellos tiene módulo mayor que 2, el complejo $(k\varepsilon, j\varepsilon)$ no pertenece al conjunto de Julia relleno asociado, y en caso contrario consideraremos que sí pertenece.
3. Marcar en el plano complejo el conjunto de todos los complejos que, de acuerdo al procedimiento anterior, están en el conjunto de Julia relleno.

Conforme varía c , cambia $\mathcal{J}_{f_c}^R$, obteniéndose generalmente *conjuntos fractales*, que tienen la particularidad de que, al examinar porciones muy pequeñas de los mismos, se encuentran réplicas en menor escala de porciones más grandes del dibujo. Esta propiedad se denomina *autosimilaridad bajo magnificación*. En la figura 1, mostramos algunos conjuntos de Julia rellenos asociados a miembros de la familia cuadrática, indicando en cada caso el valor de c .

1.3.2. El método de la órbita hacia atrás. Existe un ingenioso método, que enunciaremos ahora, para dibujar *rápidamente* un Conjunto de Julia (no relleno) \mathcal{J}_{f_c} asociado a un miembro de la familia cuadrática. Comencemos exponiendo un caso particular.

EJEMPLO 8.8. Consideremos $f(z) = z^2$, para la cual ya sabemos que $\mathcal{J}_f = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sea z_0 cualquier complejo no nulo, y consideremos las dos raíces cuadradas de z_0 .

- Si $|z_0| > 1$, sus raíces cuadradas tienen módulo estrictamente entre 1 y $|z_0|$.
- Si $|z_0| < 1$, sus raíces cuadradas tienen módulo estrictamente entre $|z_0|$ y 1.
- Si $|z_0| = 1$, es decir, si $z_0 \in \mathcal{J}_f$, sus raíces cuadradas también están en \mathcal{J}_f .

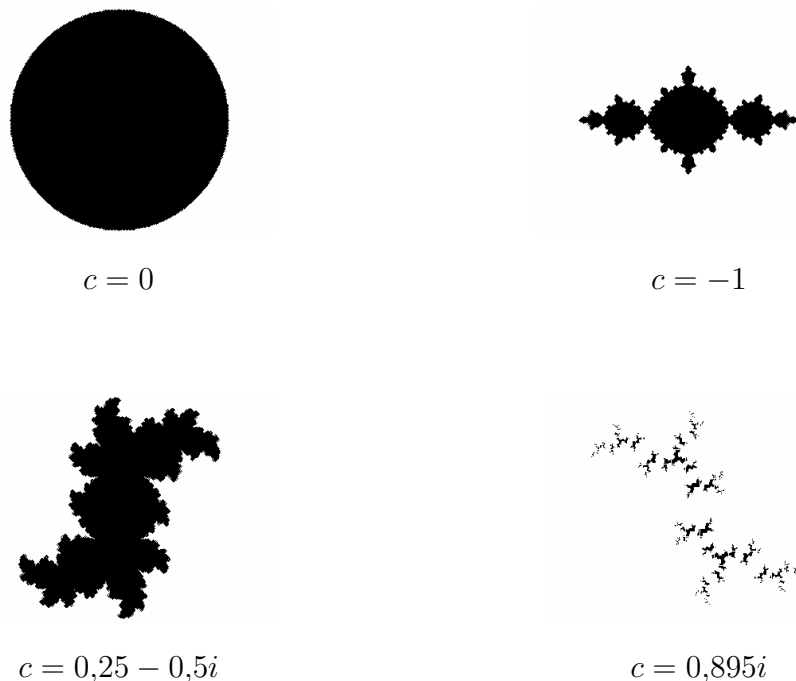


FIGURA 1.

Por lo tanto, en cualquier caso, cualquiera de las raíces cuadradas de z_0 está más próxima a \mathcal{J}_f que lo que estaba z_0 (o en \mathcal{J}_f si z_0 lo estaba). Repitiendo este razonamiento con las raíces cuadradas de z_0 , y continuando de manera análoga, obtenemos una sucesión de complejos cada vez más próximos a \mathcal{J}_f (o directamente en \mathcal{J}_f). Si $|z_0| \neq 1$, el acercamiento de los puntos a \mathcal{J}_f ocurre con extremada velocidad, si tomamos cualquier z_0 no nulo de módulo a lo sumo 2. Resulta que si dibujamos todos estos complejos (obviando los obtenidos en los, digamos, 50 primeros pasos), obtenemos una excelente aproximación de \mathcal{J}_f .

Nótese que estamos obteniendo una especie de órbita de z_0 , pero bajo la función multiforme $g(z) = \sqrt{z}$, que es, en algún sentido, inversa de la función cuadrática $f(z) = z^2$. Tal *órbita* se llama la **órbita hacia atrás** de z_0 , y tiene la particularidad de que dibujando sus puntos (obviando los primeros) se obtiene la mencionada aproximación de \mathcal{J}_f .

Con herramientas avanzadas, puede demostrarse que el procedimiento explicado más arriba puede abreviarse considerando en cada paso sólo una de las dos raíces cuadradas obtenidas, elegida al azar (teniendo cada raíz probabilidad 50 % de ser elegida), manteniéndose el hecho de que, al dibujar los puntos obtenidos (obviando los primeros), se obtiene una aproximación de \mathcal{J}_f . \square

El método descrito en el ejemplo anterior se puede generalizar para el caso en que la función considerada sea $f_c(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$, excepto que la función inversa a considerar es $g(z) = \sqrt{z - c}$ y el punto de inicio es cualquier $z_0 \neq c$. El procedimiento para obtener la aproximación de \mathcal{J}_{f_c} puede resumirse así:

1. Elegir cualquier $z_0 \in \mathbb{C} - \{c\}$.
2. Para $k \geq 1$, calcular las dos raíces cuadradas del complejo $z_{k-1} - c$, y elegir al azar (con igual probabilidad) una de ellas, llamándole z_k .
3. Dibujar la sucesión $\{z_k\}_{k \geq 50}$.

Lógicamente, en el procedimiento anterior, no va a ser posible calcular la sucesión infinita $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, pero alcanza con calcularla hasta, digamos, $k = 10050$, y graficar los últimos 10000 puntos.

En el caso $c = 0$, el procedimiento anterior reproduce el círculo a la perfección. Sin embargo, para otros valores de c (por ejemplo para -1), lo que se obtiene es una suerte de *esqueleto* de \mathcal{J}_{f_c} . En la figura 2, mostramos las imágenes generadas para los mismos valores de c que en la figura 1.

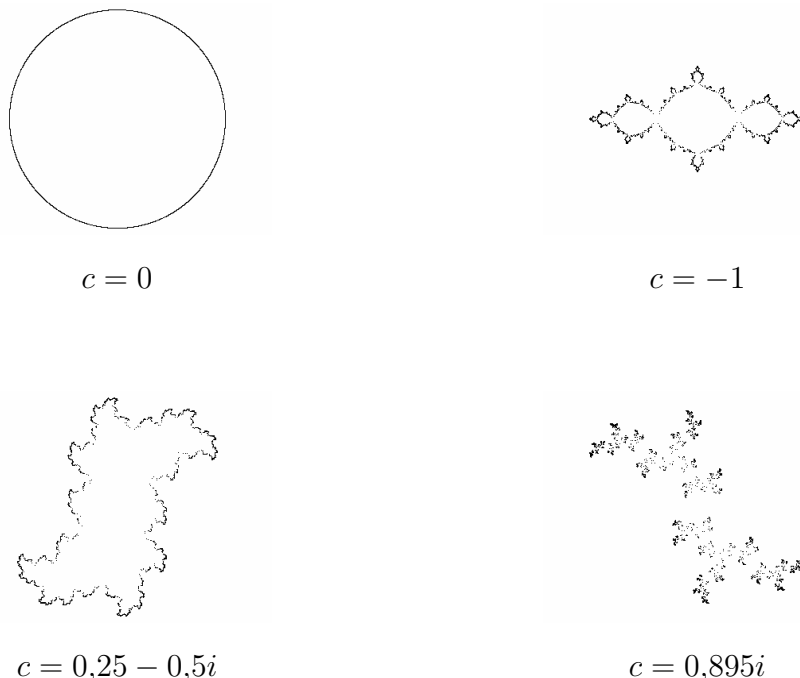


FIGURA 2.

2. El conjunto de Mandelbrot

Del análisis visual de los conjuntos de Julia correspondientes a la familia cuadrática, se desprende que los mismos caen en una de las siguientes dos categorías:

- Constan de una sola pieza, es decir, son conexos.
- Son conjuntos totalmente desconexos, es decir, constan de infinitas piezas, y sus componentes conexas son conjuntos unitarios.

Los conjuntos que caen en esta última categoría se denominan *polvo fractal*.

No es trivial la demostración de que, efectivamente, desde el punto de vista de la conexidad, no hay otras posibilidades para los conjuntos de Julia asociados a la familia cuadrática. Es sorprendente el hecho de que la órbita del 0 permite discernir a qué categoría pertenece el respectivo conjunto Julia: \mathcal{J}_{z^2+c} es un polvo fractal si, y sólo si, la órbita de 0 bajo la función $z^2 + c$ escapa. Este hecho, cuya demostración está fuera del alcance de estas notas, motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 8.9. El **conjunto de Mandelbrot** asociado a la familia cuadrática, denotado \mathcal{M} , es el conjunto de todos los complejos c tales que la órbita de 0 bajo la función $f_c(z) = z^2 + c$ no escapa. Equivalentemente, \mathcal{M} es el conjunto de todos los complejos c tales que el conjunto de Julia asociado a la función $f_c(z) = z^2 + c$ es conexo.

A la hora de dibujar \mathcal{M} , se nos presentan nuevamente los infinitos espacial y temporal. Gracias al teorema 8.6, sabemos que \mathcal{M} está contenido en el disco de radio 2 con centro en el origen. Podemos discretizar eligiendo un ε y considerando sólo los valores de c que corresponden a los vértices de la respectiva malla. Además, podemos fijar de antemano un N y calcular los N primeros términos de la órbita de 0 (para cada función de acuerdo a los valores de c); si algún

término de la respectiva órbita tiene módulo mayor que 2, el respectivo c no pertenece a \mathcal{M} , y en caso contrario consideraremos que sí. En la figura 3, mostramos una gráfica de \mathcal{M} obtenida de esta forma.

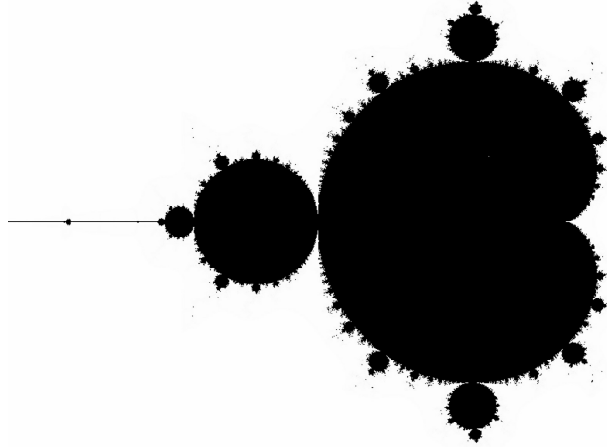


FIGURA 3.

\mathcal{M} es un conjunto asombroso por muchos motivos. Consta de un cuerpo principal y muchas *islas* que lo rodean. El cuerpo principal consta de un bulbo central, y una infinidad de bulbos más pequeños adosados. Las islas, amplificadas, son copias ligeramente deformadas del todo, con lo cual \mathcal{M} posee la característica fractal de la autosimilaridad bajo magnificación. Sin embargo, resulta que las pequeñas islas, en realidad, están conectadas por finos trazos al cuerpo principal. La demostración de que \mathcal{M} es conexo se debe a Douady y Hubbard, en 1982.

3. Sistemas de Funciones Iteradas

Ahora veremos otra manera standard de generar imágenes fractales, a partir de cierta clase de transformaciones lineales del plano complejo, aplicadas iterativamente. El mecanismo al cual nos referimos es muy sencillo de entender, y puede ser resumido en los siguientes pasos:

1. Escoger una cantidad n de transformaciones *contractivas* del plano complejo (por ejemplo, transformaciones lineales de la forma $az + b$ con $|a| < 1$), digamos w_1, w_2, \dots, w_n . El conjunto cuyos elementos son estas transformaciones se llama un *sistema de funciones iteradas*, abreviado SFI.
2. Elegir cualquier conjunto compacto (es decir, cerrado y acotado) no vacío de números complejos, digamos $B \subset \mathbb{C}$. Tal B recibe el nombre de *conjunto inicial*, y podría ser, por ejemplo, $B = \{0\}$.
3. A partir del SFI y del conjunto inicial, generar una sucesión B_0, B_1, B_2, \dots de subconjuntos del plano del siguiente modo:

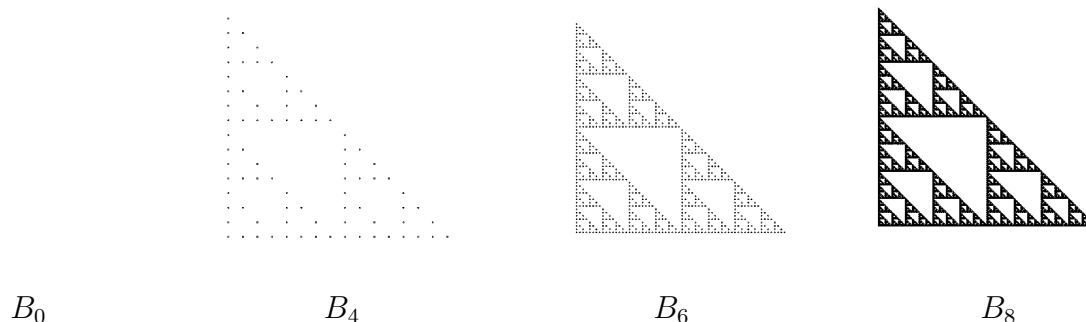
$$\begin{aligned} B_0 &= B \\ B_k &= w_1(B_{k-1}) \cup w_2(B_{k-1}) \cup \dots \cup w_n(B_{k-1}) \quad (\text{para } k > 0) \end{aligned}$$

Resulta que conforme k se hace cada vez más grande, B_k se hace tanto más parecido a un determinado conjunto que tiene, en general, la característica fractal de la autosimilaridad. Ese *conjunto límite* se denomina *atractor* del sistema de funciones iteradas, y tiene la sorprendente característica de que no depende del conjunto inicial del cual arranca el proceso iterativo.

Por ejemplo, para un SFI de tres transformaciones dadas por

$$w_1(z) = \frac{z}{2} \quad w_2(z) = \frac{z+1}{2} \quad w_3(z) = \frac{z+i}{2}$$

y conjunto inicial $B_0 = \{i\}$, algunos elementos de la sucesión $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ se muestran en la figura siguiente.



En relación al atractor de un sistema de funciones iteradas, además de la autosimilaridad, son destacables tres propiedades: existencia, unicidad e independencia del conjunto inicial; para su demostración, hace falta incursionar en el concepto de *Espacios Métricos*, que el alumno verá en materias posteriores de su carrera. Se trata de una generalización de muchos de los conceptos aprendidos en el capítulo 2, y veremos aquí algunas definiciones muy básicas, para luego aplicarlas al caso de los sistemas de funciones iteradas, obteniendo así una idea de por qué ocurre la *convergencia* de la familia $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ hacia el atractor.

3.1. Espacios métricos. Un **espacio métrico** es un par (X, d) , donde X es un conjunto de elementos que llamaremos **puntos** y d es una función de $X \times X$ en \mathbb{R} que cumple los siguientes axiomas, para todos a, b, c pertenecientes a X :

1. $d(a, b) \geq 0$
2. $d(a, b) = 0 \iff a = b$
3. $d(a, b) = d(b, a)$ (*axioma de simetría*).
4. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (*desigualdad triangular*).

La función d se llama **distancia** o **métrica** para X .

Una **sucesión** $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **en un espacio métrico** (X, d) es una función de \mathbb{N} en X . Extendemos las nociones de sucesiones convergentes y de Cauchy a espacios métricos, de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 8.10. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio métrico (X, d) .

1. Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** en X si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N, d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

2. Se dice que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión convergente** en X si existe un elemento $x \in X$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, d(x, x_n) < \varepsilon$$

Como es de esperarse, toda sucesión convergente es de Cauchy, pero no toda sucesión de Cauchy es convergente.

DEFINICIÓN 8.11. Un espacio métrico (X, d) se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es una sucesión convergente en X .

Nos interesan las funciones que actúan en un espacio métrico, interpretándose que las mismas *mueven* los elementos del espacio. De tales funciones, las que *acercan entre sí* los puntos del espacio constituyen una clase importante para la teoría de los SFI.

DEFINICIÓN 8.12. Sea (X, d) un espacio métrico, y f una función de X en X . Se dice que f es una **transformación contractiva** en X (o una **contracción** en X) si existe un número real $s \in [0, 1)$ tal que

$$\forall x_1, x_2 \in X, d(f(x_1), f(x_2)) \leq s \cdot d(x_1, x_2)$$

Un tal s se llama un **factor de contractividad** para f .

El siguiente resultado, conocido como el **Teorema del Punto Fijo de las Transformaciones Contractivas**, es clave para la demostración de la existencia y unicidad del atractor de los SFI, y de la independencia respecto del conjunto inicial.

TEOREMA 8.13. *Sea $f : X \rightarrow X$ una contracción del espacio métrico completo (X, d) . Entonces, f posee un único punto fijo $x_f \in X$, que además satisface que*

$$\text{para todo } x \in X, \lim_{k \rightarrow \infty} f^{[k]}(x) = x_f$$

3.2. El espacio métrico de los fractales. Nuestro objetivo es explicar, matemáticamente, la convergencia de la sucesión B_0, B_1, B_2, \dots hacia el atractor. Para ello, construiremos un espacio métrico en el que los elementos sean figuras del plano complejo, y la distancia mida, de alguna manera, el parecido entre dos figuras. Luego veremos cómo los SFI inducen contracciones en ese espacio, y finalmente, por aplicación del Teorema del Punto Fijo, justificaremos la convergencia del proceso iterativo.

El primer paso para definir una distancia en ese espacio métrico comienza con la definición de *distancia desde un punto hasta un conjunto*, en el plano complejo.

DEFINICIÓN 8.14. Dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $B \subset \mathbb{C}$, la **distancia desde z_0 hasta B** es

$$d_p(z_0, B) = \inf \{|z - z_0| : z \in B\}$$

Por ejemplo, si $z_0 = 2i$ y $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, entonces $d_p(z_0, B) = 1$, existiendo en este caso un complejo $z^* \in B$ tal que $d_p(z_0, B) = |z^* - z_0|$ ($z^* = i$). Pero si tomáramos $z_0 = 2i$ y $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, tendríamos que $d_p(z_0, B)$ es también 1, pero ningún $z^* \in B$ cumple que $d_p(z_0, B) = |z^* - z_0|$.

PROPOSICIÓN 8.15. *Sea B compacto no vacío y $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, existe $z^* \in B$ tal que $d_p(z_0, B) = |z^* - z_0|$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función dada por $f(z) = |z - z_0|$. Tenemos que $f(B) = \{|z - z_0| : z \in B\}$ y que $\inf f(B) = d_p(z_0, B)$. La función f es continua en \mathbb{C} (teorema 3.32), y, siendo B compacto, $f(B)$ es también compacto (teorema 3.36), de donde $\inf f(B) \in f(B)$ (puede deducirse de la proposición 2.19), lo que implica que existe $z^* \in B$ tal que $f(z^*) = \inf f(B)$, es decir, $|z^* - z_0| = d_p(z_0, B)$. \square

El resultado anterior nos dice que si B es compacto, la distancia entre z_0 y B se alcanza en al menos un punto de B . Por eso, si nos restringimos a conjuntos compactos, el *ínfimo* invocado en la definición de distancia puede ser reemplazado por *mínimo*.

OBSERVACIÓN 8.16. Para B compacto no vacío y $z_0 \in \mathbb{C}$, se tiene que $d_p(z_0, B) = 0$ si, y sólo si, $z_0 \in B$: para la ida, si $z_0 \notin B$, sea $z^* \in B$ tal que $d_p(z_0, B) = |z^* - z_0|$ (prop. 8.15). Dado que $z^* \neq z_0$, es $|z^* - z_0| > 0$, de donde $d_p(z_0, B) \neq 0$.

Para la vuelta, si $z_0 \in B$, entonces

$$0 \leq d_p(z_0, B) = \inf \{|z - z_0| : z \in B\} \leq |z_0 - z_0| = 0$$

así que $d_p(z_0, B) = 0$. \square

PROPOSICIÓN 8.17. *Sean B y C conjuntos compactos no vacíos, y $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $B \subset C$, entonces $d_p(z_0, B) \geq d_p(z_0, C)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z^* \in B$ tal que $d_p(z_0, B) = |z^* - z_0|$. Como $B \subset C$, $z^* \in C$ y entonces

$$d_p(z_0, C) = \inf \{|z - z_0| : z \in C\} \leq |z^* - z_0| = d_p(z_0, B)$$

como queríamos demostrar. \square

LEMA 8.18. *Sea B un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{C} . Definamos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante $f(z) = d_p(z, B)$. Entonces, f es continua en \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Debemos ver que

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Sean z_0 y ε dados. Tomemos $\delta = \varepsilon$, y supongamos que z cumple que $|z - z_0| < \delta$.

Sabemos que para todo $w \in B$, $|z_0 - w| \leq |z_0 - z| + |z - w|$, por lo que

$$\min \{|z_0 - w| : w \in B\} \leq |z_0 - z| + \min \{|z - w| : w \in B\}$$

y entonces $d_p(z_0, B) \leq |z_0 - z| + d_p(z, B)$, es decir, $d_p(z_0, B) - d_p(z, B) < \varepsilon$.

Análogamente, para todo $w \in B$, $|z - w| \leq |z - z_0| + |z_0 - w|$, por lo que

$$\min \{|z - w| : w \in B\} \leq |z - z_0| + \min \{|z_0 - w| : w \in B\}$$

y entonces $d_p(z, B) \leq |z - z_0| + d_p(z_0, B)$, es decir, $d_p(z_0, B) - d_p(z, B) > -\varepsilon$.

Juntando las dos desigualdades arriba demostradas, tenemos que

$$-\varepsilon < d_p(z_0, B) - d_p(z, B) < \varepsilon$$

de donde $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. □

El segundo paso hacia la definición de distancia entre figuras del plano consiste en definir una *cuasidistancia* entre dos subconjuntos del plano complejo, de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 8.19. Sean A, B subconjuntos del plano complejo. La **cuasidistancia entre A y B** es

$$d_c(A, B) = \sup \{d_p(z_0, B) : z_0 \in A\}$$

Por ejemplo, si $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$, entonces $d_c(A, B) = 0$ (pues, de la observación 8.16, $\forall z_0 \in A, d_p(z_0, B) = 0$) y $d_c(B, A) = 1$. Como vemos, no se cumple el axioma de simetría ni el primer axioma de distancia, pero luego veremos que se cumple la desigualdad triangular, y de ahí el prefijo *cuasi*; entonces, d_c nos servirá para construir una adecuada forma de medir distancias entre figuras. Veamos primero que si A y B son ambos compactos no vacíos, $d_c(A, B)$ se alcanza entre puntos de ambos conjuntos.

PROPOSICIÓN 8.20. Si A y B son subconjuntos compactos no vacíos del plano complejo, entonces existen $z_1 \in A, z_2 \in B$ tales que $d_c(A, B) = |z_1 - z_2|$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = d_p(z, B)$. La función f es continua (lema 8.18) y se tiene que $\{d_p(z_0, B) : z_0 \in A\} = f(A)$. Siendo A compacto, se tiene que $\sup f(A) \in f(A)$ (proposición 2.19), es decir, existe $z_1 \in A$ tal que $f(z_1) = \sup f(A)$, lo cual implica que $d_p(z_1, B) = d_c(A, B)$. Pero además, de la proposición 8.15, existe $z_2 \in B$ tal que $d_p(z_1, B) = |z_1 - z_2|$. Concluimos entonces que $d_c(A, B) = |z_1 - z_2|$ en donde $z_1 \in A$ y $z_2 \in B$. □

Como vemos, la compacidad de conjuntos juega un rol importante en las propiedades de d_p y d_c . Además, como veremos después, cada conjunto de la sucesión $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es compacto y no vacío. Nos restringiremos, entonces, a esa clase de conjuntos (los compactos no vacíos) de \mathbb{C} para buscar una buena manera de medir distancias entre conjuntos.

DEFINICIÓN 8.21. El **espacio de los fractales** es el conjunto \mathcal{H} definido por

$$\mathcal{H} = \{B \subset \mathbb{C} : B \text{ es compacto y } B \neq \emptyset\}$$

Antes de definir una distancia para \mathcal{H} , deduciremos propiedades adicionales de d_c .

PROPOSICIÓN 8.22. $\forall A, B \in \mathcal{H}, d_c(A, B) \in \mathbb{R}_0^+$.

DEMOSTRACIÓN. Dados $A, B \in \mathcal{H}$, por proposición 8.20, existen $z_1 \in A, z_2 \in B$ tales que $d_c(A, B) = |z_1 - z_2| \geq 0$. □

PROPOSICIÓN 8.23. $\forall A \in \mathcal{H}, d_c(A, A) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Dado $A \in \mathcal{H}$, $d_c(A, A) = \sup \{d_p(z_0, A) : z_0 \in A\} = \sup \{0\} = 0$. □

PROPOSICIÓN 8.24. $\forall A, B, C \in \mathcal{H}, d_c(A, B) \leq d_c(A, C) + d_c(C, B)$.

DEMOSTRACIÓN. De la propiedad triangular de módulos, sabemos que

$$\forall a \in A, b \in B, c \in C, |a - b| \leq |a - c| + |c - b|$$

Luego,

$$\forall a \in A, c \in C, \inf \{|a - b| : b \in B\} \leq |a - c| + \inf \{|c - b| : b \in B\}$$

de donde

$$\forall a \in A, c \in C, d_p(a, B) \leq |a - c| + d_p(c, B)$$

Ahora sea $a \in A$. Elijamos $c^* \in C$ tal que $d_p(a, C) = |a - c^*|$ (proposición 8.15). Tenemos que

$$\begin{aligned} d_p(a, B) &\leq |a - c^*| + d_p(c^*, B) = d_p(a, C) + d_p(c^*, B) \\ &\leq d_p(a, C) + \sup \{d_p(c, B) : c \in C\} = d_p(a, C) + d_c(C, B) \end{aligned}$$

Puesto que a es arbitrario en A , se tiene que

$$\forall a \in A, d_p(a, B) \leq d_p(a, C) + d_c(C, B)$$

así que

$$\begin{aligned} d_c(A, B) &= \sup \{d_p(a, B) : a \in A\} \\ &\leq \sup \{d_p(a, C) : a \in A\} + d_c(C, B) = d_c(A, C) + d_c(C, B) \end{aligned}$$

según deseábamos demostrar. \square

PROPOSICIÓN 8.25. Sean $A, B, C \in \mathcal{H}$. Si $B \subset C$, entonces $d_c(A, B) \geq d_c(A, C)$.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier $z_0 \in A$, tenemos que $d_p(z_0, B) \geq d_p(z_0, C)$ (proposición 8.17). Luego, $\sup \{d_p(z_0, B) : z_0 \in A\} \geq \sup \{d_p(z_0, C) : z_0 \in A\}$, lo que demuestra el enunciado. \square

Ahora ya estamos en condiciones de definir una distancia entre elementos de \mathcal{H} que capture adecuadamente cuán parecidas son dos figuras de ese conjunto.

DEFINICIÓN 8.26. Para $A, B \in \mathcal{H}$, se define la **distancia entre A y B** mediante

$$h(A, B) = \max \{d_c(A, B), d_c(B, A)\}$$

TEOREMA 8.27. La función $h : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ anteriormente definida es efectivamente una distancia para el espacio \mathcal{H} . En consecuencia, (\mathcal{H}, h) es un espacio métrico.

DEMOSTRACIÓN.

1. Dados $A, B \in \mathcal{H}$, $d_c(A, B)$ y $d_c(B, A)$ son números reales no negativos (proposición 8.22), luego $h(A, B)$ también lo es.
2. De la proposición 8.23, $h(A, A) = \max \{d_c(A, A), d_c(A, A)\} = 0$. Además, si $A \neq B$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $a \in A - B$. Luego, $d_p(a, B) > 0$ (observación 8.16), así que $h(A, B) \geq d_c(A, B) \geq d_p(a, B) > 0$. En síntesis, tenemos que $h(A, B) = 0$ si, y sólo si, $A = B$.
3. Dados $A, B \in \mathcal{H}$, tenemos que

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max \{d_c(A, B), d_c(B, A)\} \\ &= \max \{d_c(B, A), d_c(A, B)\} = h(B, A) \end{aligned}$$

de donde vemos que se cumple el axioma de simetría.

4. Dados $A, B, C \in \mathcal{H}$, recordando la proposición 8.24, tenemos que

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{d_c(A, B), d_c(B, A)\} \\ &\leq \max\{d_c(A, C) + d_c(C, B), d_c(B, C) + d_c(C, A)\} \\ &\leq \max\{d_c(A, C), d_c(C, A)\} + \max\{d_c(B, C), d_c(C, B)\} \\ &= h(A, C) + h(C, B) \end{aligned}$$

y entonces se cumple la propiedad triangular.

□

Con no poco trabajo y consideraciones más específicas de los espacios métricos, es factible mostrar el siguiente resultado, que nosotros admitiremos sin demostración.

TEOREMA 8.28. *El espacio métrico (\mathcal{H}, h) es completo.*

3.3. Atractores. Más arriba hemos visto que el proceso iterativo de un SFI consiste en generar una sucesión de conjuntos aplicando reiteradamente la *unión de transformados* $w_1(B_{k-1}) \cup \dots \cup w_n(B_{k-1})$. Formalmente, estamos considerando la transformación

$$\begin{aligned} W &: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ W(B) &= w_1(B) \cup \dots \cup w_n(B) \end{aligned}$$

Para ver que efectivamente $W(B) \in \mathcal{H}$ toda vez que $B \in \mathcal{H}$, empecemos recordando que cada w_j es una transformación contractiva en \mathbb{C} .

LEMA 8.29. *Si $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es contractiva, entonces es continua en \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea s un factor de contractividad para w . Tomemos $z_0 \in \mathbb{C}$, y fijemos $\varepsilon > 0$. Hagamos $\delta = \varepsilon/s$. Si $|z - z_0| < \delta$, por ser w contractiva tenemos que $|w(z) - w(z_0)| \leq s|z - z_0| < \varepsilon$, mostrando que w es continua en z_0 . Puesto que z_0 se eligió arbitrariamente, w es continua en \mathbb{C} . □

PROPOSICIÓN 8.30. *Si w_1, \dots, w_n son transformaciones contractivas de \mathbb{C} en \mathbb{C} y $B \in \mathcal{H}$, entonces $w_1(B) \cup \dots \cup w_n(B) \in \mathcal{H}$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que B es compacto no vacío y que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, w_j es continua (lema 8.29), cada $w_j(B)$ es compacto no vacío (teorema 3.36), de donde $w_1(B) \cup \dots \cup w_n(B)$ es no vacío, y compacto pues es unión finita de conjuntos cerrados y acotados (teorema 2.10). □

La transformación W definida más arriba no sólo está bien definida en \mathcal{H} , sino que, más aún, es contractiva.

LEMA 8.31. *Sean $A, B, C, D \in \mathcal{H}$. Entonces,*

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{h(A, C), h(B, D)\}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$\begin{aligned} d_c(A \cup B, C) &= \sup\{d_p(z_0, C) : z_0 \in A \cup B\} \\ &= \max\{\sup\{d_p(z_0, C) : z_0 \in A\}, \sup\{d_p(z_0, C) : z_0 \in B\}\} \\ &= \max\{d_c(A, C), d_c(B, C)\} \end{aligned}$$

Luego, teniendo presente la proposición 8.25,

$$\begin{aligned}
h(A \cup B, C \cup D) &= \max \{d_c(A \cup B, C \cup D), d_c(C \cup D, A \cup B)\} \\
&= \max \{\max \{d_c(A, C \cup D), d_c(B, C \cup D)\}, \\
&\quad \max \{d_c(C, A \cup B), d_c(D, A \cup B)\}\} \\
&= \max \{d_c(A, C \cup D), d_c(B, C \cup D), d_c(C, A \cup B), d_c(D, A \cup B)\} \\
&\leq \max \{d_c(A, C), d_c(B, D), d_c(C, A), d_c(D, B)\} \\
&= \max \{\max \{d_c(A, C), d_c(C, A)\}, \max \{d_c(B, D), d_c(D, B)\}\} \\
&= \max \{h(A, C), h(B, D)\}
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

TEOREMA 8.32. Si w_1, \dots, w_n son transformaciones contractivas de \mathbb{C} en \mathbb{C} , con factores de contractividad s_1, \dots, s_n respectivamente, entonces la transformación

$$\begin{aligned}
W &: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\
W(B) &= w_1(B) \cup \dots \cup w_n(B)
\end{aligned}$$

es contractiva en (\mathcal{H}, h) , siendo $\max \{s_1, \dots, s_n\}$ un factor de contractividad para W .

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en $n \geq 1$.

1. Caso $n = 1$: Sean $B, C \in \mathcal{H}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
d_c(W(B), W(C)) &= \sup \{\inf \{|w_1(b) - w_1(c)| : c \in C\} : b \in B\} \\
&\leq \sup \{\inf \{s_1|b - c| : c \in C\} : b \in B\} \\
&= s_1 \cdot d_c(B, C)
\end{aligned}$$

y similarmente $d_c(W(C), W(B)) \leq s_1 \cdot d_c(C, B)$, así que

$$\begin{aligned}
h(W(B), W(C)) &\leq \max \{s_1 \cdot d_c(B, C), s_1 \cdot d_c(C, B)\} \\
&= s_1 \cdot \max \{d_c(B, C), d_c(C, B)\} = s_1 h(B, C)
\end{aligned}$$

2. Paso inductivo: supongamos que hay $n + 1$ transformaciones contractivas w_1, \dots, w_{n+1} . Designemos por T a la transformación de \mathcal{H} en \mathcal{H} dada por $T(B) = w_1(B) \cup \dots \cup w_n(B)$. Por hipótesis de inducción, T es contractiva con factor $s = \max \{s_1, \dots, s_n\}$. Sean $B, C \in \mathcal{H}$. Entonces, teniendo presente el lema 8.31,

$$\begin{aligned}
h(W(B), W(C)) &= h(T(B) \cup w_{n+1}(B), T(C) \cup w_{n+1}(C)) \\
&\leq \max \{h(T(B), T(C)), h(w_{n+1}(B), w_{n+1}(C))\} \\
&\leq \max \{s \cdot h(B, C), s_{n+1} h(B, C)\} \\
&\leq \max \{s, s_{n+1}\} h(B, C) \\
&= \max \{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}\} h(B, C)
\end{aligned}$$

completando así la demostración. \square

Ya estamos en condiciones de demostrar que el proceso iterativo de un SFI converge a un único conjunto, independientemente del conjunto inicial.

TEOREMA 8.33. Sea $\{w_1, \dots, w_n\}$ un sistema de funciones iteradas. Existe un único conjunto \mathcal{A} compacto no vacío, denominado el **atractor** del sistema, tal que para cualquier conjunto $B_0 \in \mathcal{H}$, la sucesión $\{B_0, B_1, B_2, \dots\}$ definida por $B_k = w_1(B_{k-1}) \cup \dots \cup w_n(B_{k-1})$ para todo $k > 0$, converge a \mathcal{A} en el espacio métrico (\mathcal{H}, h) .

DEMOSTRACIÓN. Del teorema 8.32, sabemos que W es una contracción en el espacio métrico completo (\mathcal{H}, h) . Entonces, por el Teorema del Punto Fijo de las Transformaciones Contractivas, existe un único $\mathcal{A} \in \mathcal{H}$ tal que $W(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, y $\lim_{k \rightarrow \infty} W^{[k]}(B_0) = \mathcal{A}$ cualquiera sea $B_0 \in \mathcal{H}$.

Por construcción, la sucesión $\{B_0, B_1, B_2, \dots\}$ cumple que su k -ésimo término ($k > 0$) es $B_k = W(B_{k-1})$, y de allí que $B_k = W^{[k]}(B_0)$. Luego, $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \mathcal{A}$, cualquiera sea $B_0 \in \mathcal{H}$. \square

Una consecuencia del resultado anterior es que el atractor \mathcal{A} del SFI $\{w_1, \dots, w_n\}$ satisface

$$\mathcal{A} = w_1(\mathcal{A}) \cup \dots \cup w_n(\mathcal{A})$$

de donde se ve que si las w_j son similitudes, entonces el atractor puede verse compuesto de n copias más pequeñas de sí mismo, es decir, goza de la propiedad de autosemejanza.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L.: “ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA”. Aguilar, 1971.
- [2] Balanzat, M.: “MATEMÁTICA AVANZADA PARA LA FÍSICA” (4° ed.). Eudeba, 1994.
- [3] Barnsley, M.: “FRACTALS EVERYWHERE”. Academic Press, 1988.
- [4] Churchill, R.; Brown, J.: “VARIABLE COMPLEJA Y APLICACIONES” (5° ed.). Mc Graw-Hill, 1992.
- [5] Conway, J.: “FUNCTIONS OF ONE COMPLEX VARIABLE” (2° ed.). Springer Verlag, 1978.
- [6] Dettman, J.: “APPLIED COMPLEX VARIABLES”. Dover Publications, Inc., 1965.
- [7] Devaney, R.: “AN INTRODUCTION TO CHAOS, FRACTALS AND DYNAMICS”. Addison Wesley, 1990.
- [8] Hauser, A.: “VARIABLE COMPLEJA”. Fondo Educativo Interamericano S.A., 1973.
- [9] Krasnov: “FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, CÁLCULO OPERACIONAL Y TEORÍA DE LA ESTABILIDAD”. Reverté, 1976.
- [10] Levinson, N.; Redheffer, R.: “CURSO DE VARIABLE COMPLEJA”. Reverté, 1981.
- [11] Markushevich, A.: “TEORÍA DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS” Tomo I (2° ed.). MIR, 1978.
- [12] Needham, T.: “VISUAL COMPLEX ANALYSIS”. Oxford University Press, 1997.
- [13] Pennisi, L.: “ELEMENTS OF COMPLEX VARIABLE”. Holt, Rinehart y Wilson, 1963.
- [14] Rudin, W.: “PRINCIPIOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO”. McGraw-Hill, 1976.
- [15] Wunch, A.: “VARIABLE COMPLEJA CON APLICACIONES” (2° ed.). Addison Wesley Iberoamericana, 1997.
- [16] Yazlle, J.; Egüez, C.: “COMPLEMENTOS DE ANÁLISIS” (Apuntes de cátedra). Inédito, 2006.